BRAUER

ÜBER DIE DARSTELLUNG DER DREHUNGSGRUPPE

Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch Gruppen linearer Substitutionen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

genehmigt

von der philosophischen Fakultät

der

Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin.

Von

Richard Brauer

aus Berlin.

Tag der Promotion: 16. März 1926.

Göttingen 1925.

Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner)

Referenten: Herr Professor Dr. Schur.
Herr Professor Dr. Schmidt.

Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch Gruppen linearer Substitutionen.

Die Darstellungen der reellen Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen sind von Herrn I. Schur in drei Arbeiten[1]) behandelt worden. Die Grundlage für die Untersuchung bildet die Übertragung der Formeln der Theorie der Gruppencharaktere mit Hilfe des Hurwitzschen Integrationsprozesses[2]). Diese Methoden sind im Anschluß hieran von Herrn H. Weyl[3]) noch weiter ergänzt, vereinfacht und auch auf andere Fälle angewendet worden.

In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß sich die Charakteristiken der Drehungsgruppe auch mit rein algebraischen Hilfsmitteln, also unter Vermeidung des Integrationsprozesses bestimmen lassen. Während bei Herrn Schur in gewissen Fällen sich nur die Summe von zwei einfachen Charakteristiken, nicht aber die einfachen Charakteristiken selbst ergeben, werden im folgenden auch diese Ausdrücke bestimmt werden[4]).

Die Arbeit ist in drei Abschnitte eingeteilt: Im 1. Abschnitt wird zunächst die Struktur der Charakteristiken untersucht; es gelingt ferner in einfacher Weise, eine Übersicht über die Gesamtheit der irreduziblen Darstellungen zu erhalten und ihre Realitätsverhältnisse zu untersuchen. Darauf werden die Hilfsmittel entwickelt, welche die Grundlagen für die späteren Be-

---

1) Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie. I, II und III, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1924, S. 189—208, S. 297—321 und S. 346—355. Im folgenden werden diese Arbeiten kurz mit A I, A II und A III zitiert.

2) Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration, Göttinger Nachrichten 1897, S. 71.

3) Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1924, S. 338.

4) Herr Weyl hat diese Formel unabhängig auf ganz anderem Wege gefunden. Vgl. eine demnächst in der Math. Zeitschrift erscheinende Arbeit von Herrn Weyl. Ich habe die Ausdrücke im Dezember 1924 bestimmt und sie Herrn Schur mitgeteilt, bevor die Weylsche Arbeit bei der Zeitschrift eingereicht war.

trachtungen bilden. Im Anschluß hieran wird im 2. Abschnitt die Schursche Hauptformel bewiesen. Im 3. Abschnitt wird die Zerlegung des Kroneckerschen Produktes von zwei irreduziblen Homomorphismen in irreduzible Bestandteile durchgeführt. Das Kompositionsgesetz, das sich hierbei ergibt, gestattet, die genauen Ausdrücke für die einfachen Charakteristiken anzugeben. Man erhält ferner eine Lösung des Abzählungsproblems für Orthogonalinvarianten[1]). Zum Schluß gehe ich noch kurz auf die Übertragung der Methoden auf die Gruppe der unitär orthogonalen Substitutionen ein.

Die hier durchgeführte Untersuchung begann ich auf Anregung von Herrn Prof. Schur schon im Frühjahr 1924. Bei der Abfassung der Arbeit waren mir die beiden letzten oben genannten Schurschen Abhandlungen im einzelnen noch nicht bekannt. Dagegen hatte mir Herr Prof. Schur freundlicherweise sein Hauptresultat schon längere Zeit vor der Publikation mitgeteilt. Ich möchte ihm auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank dafür aussprechen.

I. ABSCHNITT.

§ 1. Die Struktur der Charakteristiken der Drehungsgruppe.

Unter der Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ verstehe ich im folgenden die Gruppe aller reellen orthogonalen Substitutionen von der Determinante 1 in n Variabeln. Die charakteristischen Wurzeln einer derartigen Substitution haben für $n = 2\nu + 1$ die Form

$$1, e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_\nu}, e^{-i\varphi_\nu}$$

und für $n = 2\nu$ die Form

$$e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_\nu}, e^{-i\varphi_\nu}.$$

Die „Drehungswinkel“ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ sind dabei natürlich nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt; auch kommt es auf ihre Reihenfolge und ihre Vorzeichen nicht an. Man verstehe für $n = 2\nu + 1$ unter $S(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)$ die Drehung:

$$\text{(1a)} \quad \begin{aligned} x'_{2\lambda-1} &= \cos\varphi_\lambda \cdot x_{2\lambda-1} + \sin\varphi_\lambda \cdot x_{2\lambda} \\ x'_{2\lambda} &= -\sin\varphi_\lambda \cdot x_{2\lambda-1} + \cos\varphi_\lambda \cdot x'_{2\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu) \\ x'_{2\nu+1} &= x_{2\nu+1} \end{aligned}$$

1) Dies Problem läßt sich, wie Herr Schur in A III gezeigt hat, mit Hilfe des Integrationsprozesses in besonders eleganter Weise erledigen.

Dann ist jede Drehung s mit den Drehungswinkeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ innerhalb der Gruppe $\mathfrak{D}$ zu $S(\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_\nu)$ ähnlich. Im Falle $n = 2\nu$ bezeichne man mit $S(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)$ die Drehung:

$$\text{(1 b)} \qquad \begin{aligned} x'_{2\lambda-1} &= \cos\varphi_\lambda . x_{2\lambda-1} + \sin\varphi_\lambda . x_{2\lambda} \\ x'_{2\lambda} &= -\sin\varphi_\lambda . x_{2\lambda-1} + \cos\varphi_\lambda . x_{2\lambda} \end{aligned} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Es ist dann eine beliebige Drehung s mit den Drehungswinkeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ innerhalb der Gruppe $\mathfrak{D}$ entweder zu $S(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)$ oder zu $S(-\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)$ ähnlich; ersetzt man eventuell φ_1 durch $-\varphi_1$, so kann man annehmen, daß der 1. Fall eintritt.

Es sei $\mathfrak{H}$ ein stetiger Homomorphismus[1]) von $\mathfrak{D}$; dem Element s von $\mathfrak{D}$ entspreche in $\mathfrak{H}$ $H(s)$; die zugehörige Charakteristik sei $\chi(s)$. Wählt man bei gegebenem s $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ in der eben angegebenen Weise, so ist $\chi(s)$ eine Funktion von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ allein. Es handelt sich daher nur darum $\chi(S(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu))$ zu bestimmen. Die Matrizen $S(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)$ bilden sowohl für gerades wie für ungerades n eine Abelsche Gruppe; sie genügen der Gleichung

$$\text{(2)} \quad S(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)\, S(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu) = S(\varphi_1 + \psi_1, \varphi_2 + \psi_2, \ldots, \varphi_\nu + \psi_\nu)$$

Bezeichnet man daher die $S(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)$ in $\mathfrak{H}$ entsprechende Matrix mit $R(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)$, so bilden die Matrizen $R(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)$ eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{R}$, und es ist

$$\text{(3)} \quad R(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)\, R(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu) = R(\varphi_1 + \psi_1, \varphi_2 + \psi_2, \ldots, \varphi_\nu + \psi_\nu).$$

Da nun $\mathfrak{R}$ als Abelsche Gruppe nur lineare irreduzible Bestandteile haben kann[2]), kann man annehmen, wenn man eventuell $\mathfrak{H}$ durch einen ähnlichen Homomorphismus ersetzt, daß in allen Matrizen von $\mathfrak{R}$ oberhalb der Hauptdiagonale nur Nullen stehen. Steht in $R(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)$ in der Hauptdiagonale in der μ-ten Zeile $r_\mu(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)$, so folgt aus (3)

$$\text{(4)} \quad r_\mu(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)\, r_\mu(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu) = r_\mu(\varphi_1 + \psi_1, \varphi_2 + \psi_2, \ldots, \varphi_\nu + \psi_\nu).$$

Aus dieser Funktionalgleichung für die Funktion r_μ ergibt sich

$$\text{(5)} \quad \begin{aligned} & r_\mu(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu) \\ &= r_\mu(\varphi_1, 0, \ldots, 0)\, r_\mu(0, \varphi_2, 0, \ldots, 0) \ldots r_\mu(0, \ldots, 0, \varphi_\nu), \end{aligned}$$

so daß man nur $r_\mu(\varphi_1, 0, \ldots, 0), r_\mu(0, \varphi_2, 0, \ldots, 0), \ldots,$ zu bestimmen

---

1) Die wichtigsten Begriffe der Theorie der Gruppen linearer Substitutionen sind in A I S. 197 zusammengestellt. — Alle Homomorphismen werden im folgenden stillschweigend als stetig vorausgesetzt.

2) Vgl. etwa I. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1905, S. 406, § 2.

hat. Es ist aber nach (4)

(6) $\quad r_\mu(\varphi_1, 0, \ldots, 0)\, r_\mu(\psi_1, 0, \ldots, 0) = r_\mu(\varphi_1 + \psi_1, 0, \ldots, 0).$

Die Elemente von $R(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)$ sind stetige Funktionen der Elemente von $S(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)$, also stetige Funktionen von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$. Nach einem bekannten Satz von Cauchy[1]) ergibt sich aus (6)

$$r_\mu(\varphi_1, 0, \ldots, 0) = e^{\lambda_1 \varphi_1} \quad \text{oder} \quad r_\mu(\varphi_1, 0, \ldots, 0) = 0. \qquad (\lambda_1 \text{ konstant})$$

Da $r_\mu(\varphi_1, 0, \ldots, 0)$ in φ_1 periodisch mit der Periode 2π sein muß, muß λ_1 ein ganzzahliges Vielfaches von i sein; $\lambda_1 = \varkappa_1 i$. Analog wird

$$r_\mu(0, \varphi_2, 0, \ldots, 0) = e^{i\varkappa_2\varphi_2} \quad \text{oder} \quad r_\mu(0, \varphi_2, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Man findet schließlich nach (5)

$$(7) \quad r_\mu(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu) = e^{i(\varkappa_1\varphi_1 + \varkappa_2\varphi_2 + \cdots + \varkappa_\nu\varphi_\nu)}$$
$$\text{oder } r_\mu(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu) = 0$$

$$(8) \quad \chi(s) = \sum_\mu r_\mu(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu) = \sum_\varkappa e^{i(\varkappa_1\varphi_1 + \varkappa_2\varphi_2 + \cdots + \varkappa_\nu\varphi_\nu)}.$$

Dabei ist die zweite Summe über eine gewisse, nicht näher bekannte Menge von endlich vielen Gitterpunkten $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$ im ν-dimensionalen Raum zu erstrecken; derselbe Gitterpunkt $\varkappa$ kann aber in dieser Menge mehrfach vorkommen. Analog sollen auch im folgenden derartige Summen verstanden werden.

Wie man leicht erkennt (vgl. A II, S. 300) hat $\chi(s)$ als Funktion von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ die folgenden „Symmetrieeigenschaften".

1. $\chi(s)$ ist symmetrisch in $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$.

2. Für *ungerades* n bleibt $\chi(s)$ ungeändert, wenn man bei einer *beliebigen* Anzahl von Variabeln φ_ϱ das Vorzeichen abändert; bei *geradem* n bleibt $\chi(s)$ ungeändert, wenn man bei einer *geraden* Anzahl von Variabeln das Vorzeichen abändert.

Man bezeichne nun mit $\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu)$ die Summe der *verschiedenen* Glieder, die aus $e^{i(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu\varphi_\nu)}$ bei Permutation der Variabeln und bei den genannten Abänderungen der Vorzeichen entstehen. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Ausdrücke $e^{i(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu\varphi_\nu)}$ folgt, daß $\chi(s)$ zu jedem solchen Gliede auch immer gleich $\sigma(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu)$ enthalten muß. Man er-

1) Cauchy, Oeuvres Ser. 2, Bd. 3, S. 98.

hält daher eine Darstellung

$$\chi(s) = \sum_{\lambda} \sigma(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu) = \sum_{\lambda} \sigma(\lambda), \tag{9}$$

wo λ eine gewisse Gitterpunktsmenge durchläuft. Man kann noch vorschreiben

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_\nu \geqq 0 \\ \text{bezw. } \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_{\nu-1} \geqq |\lambda_\nu|, \end{array}\right. \tag{10}$$

je nachdem n ungerade oder gerade ist. Das ist selbstverständlich, da $\sigma(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu)$ ungeändert bleibt, wenn man die ν Argumente permutiert und eine beliebige, bezw. eine gerade Anzahl von Vorzeichen abändert.

Es sollen nun die Glieder $e^{i(\varkappa_1\varphi_1 + \varkappa_2\varphi_2 + \cdots + \varkappa_\nu\varphi_\nu)}$ einer Charakteristik geordnet werden. Bei ungeradem n soll ein Glied $e^{i(\varkappa_1\varphi_1 + \varkappa_2\varphi_2 + \cdots + \varkappa_\nu\varphi_\nu)}$ höher als ein Glied $e^{i(\varkappa_1'\varphi_1 + \varkappa_2'\varphi_2 + \cdots + \varkappa_\nu'\varphi_\nu)}$ heißen, wenn die erste von 0 verschiedene unter den Differenzen

$$\varkappa_1 - \varkappa_1', \; \varkappa_2 - \varkappa_2', \; \ldots, \; \varkappa_\nu - \varkappa_\nu'$$

positiv ist; bei geradem n dagegen, wenn die erste von 0 verschiedene unter den Differenzen

$$\varkappa_1 - \varkappa_1', \; \varkappa_2 - \varkappa_2', \; \ldots, \; \varkappa_{\nu-1} - \varkappa_{\nu-1}', \; |\varkappa_\nu| - |\varkappa_\nu'|$$

positiv ist, oder wenn alle Differenzen 0 sind, und

$$\varkappa_\nu > 0, \; \varkappa_\nu' = -\varkappa_\nu < 0$$

ist. Unter den Gliedern einer Charakteristik $\chi(s)$ wird es ein gewisses höchstes $e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)}$ geben, das etwa d mal vorkomme. Dann soll $d \,.\, e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)}$ das Anfangsglied von $\chi(s)$ heißen. Wegen der Symmetrieeigenschaften der Charakteristiken ist dann von selbst

$$\begin{array}{l} k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_\nu \geqq 0 \\ \text{bezw. } k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_{\nu-1} \geqq |k_\nu|. \end{array}$$

Nach den gleichen Prinzipien wie die Glieder $e^{i(\varkappa_1\varphi_1 + \varkappa_2\varphi_2 + \cdots + \varkappa_\nu\varphi_\nu)}$ denken wir uns auch die ν-dimensionalen Gitterpunkte

$$\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$$

geordnet. Eine Charakteristik $\chi(s)$ mit dem Anfangsglied $d \,.\, e^{i(k_1\varphi_1 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)}$ läßt dann eine Darstellung zu

$$\chi(s) = d \,.\, \sigma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) + \sum_{\lambda} \sigma(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu) = d \,.\, \sigma(k) + \sum_{\lambda} \sigma(\lambda), \tag{11}$$

wo λ eine gewisse Gitterpunktsmenge durchläuft, deren Punkte alle niedriger als $k = (k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ sind und außerdem den Bedingungen (10) genügen.

Der eben geschilderte Gedankengang läßt auch erkennen, daß die charakteristischen Wurzeln einer Matrix A des Homomorphismus $\mathfrak{H}$ vom absoluten Betrage 1 sind. Das beruht auf der folgenden Bemerkung:

Ist $\mathfrak{H}$ eine Gruppe linearer Substitutionen[1]), und gibt es eine feste Zahl m, so daß für alle $A = (a_{\varkappa\lambda})$ aus $\mathfrak{H}$ die Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$ dem absoluten Betrage nach unter m liegen, so haben alle A nur Wurzeln vom absoluten Betrage 1.

Es muß nämlich jedenfalls eine feste Zahl c geben, so daß alle Matrizen A aus $\mathfrak{H}$ nur charakteristische Wurzeln haben, die dem absoluten Betrage nach unter c liegen. Hat A nun die charakteristische Wurzel λ, so ist λ^ν charakteristische Wurzel von A^ν, $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; alle diese Matrizen gehören zu $\mathfrak{H}$, also ist

$$|\lambda|^\nu \leqq c, \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Daraus folgt dann sofort $|\lambda| = 1$, w. z. b. w.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{D}'$ die Gruppe *aller* reellen orthogonalen Substitutionen, so folgt aus dieser Bemerkung, daß bei einem Homomorphismus $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{D}'$ nur Matrizen auftreten, deren Wurzeln vom absoluten Betrage 1 sind. Ist t ein beliebiges Element von $\mathfrak{D}'$, $\chi(t)$ die Charakteristik des Homomorphismus $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{D}'$, so ist daher

$$\chi(t^{-1}) = \overline{\chi(t)}.$$

Da innerhalb von $\mathfrak{D}'$ t und t^{-1} ähnlich sind, ist andererseits

$$\chi(t) = \chi(t^{-1}).$$

Also muß $\chi(t)$ reell sein; alle Charakteristiken von $\mathfrak{D}'$ sind reell. Die Charakteristiken von $\mathfrak{D}$ sind in den Fällen $n \equiv 1 \pmod 2$, $n \equiv 0 \pmod 4$ sicher reell. Denn wegen der Symmetrieeigenschaften der Charakteristiken kommt mit einem Glied

$$e^{i(\varkappa_1\varphi_1 + \varkappa_2\varphi_2 + \cdots + \varkappa_\nu\varphi_\nu)}$$

das konjugiert komplexe vor, und zwar ebenso oft.

---

1) Das Wort „Gruppe“ ist hier im eigentlichen Sinne zu verstehen: Die Determinanten sind von 0 verschieden, und zu jeder Matrix A kommt die inverse vor. Ebenso soll, — was nicht sehr wesentlich ist —, wie in A I in die Definition des Homomorphismus aufgenommen werden, daß die Determinanten von 0 verschieden sind.

§ 2. Die Anfangsglieder der einfachen Charakteristiken.

Zunächst sei $n = 2\nu + 1$. Die ϱ-te Determinantentransformation von $\mathfrak{D}$, $(1 \leqq \varrho \leqq \nu)$, hat bekanntlich[1]) als Charakteristik die ϱ-te elementarsymmetrische Funktion der charakteristischen Wurzeln $1, e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_\nu}, e^{-i\varphi_\nu}$ einer beliebigen Matrix s aus $\mathfrak{D}$. Diese Charakteristik werde mit χ_ϱ bezeichnet; ihr Anfangsglied ist $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_\varrho)}$. Das Produkt zweier Charakteristiken ist wieder eine Charakteristik, nämlich die des Kroneckerschen Produktes der beiden zugehörigen Homomorphismen. Das Anfangsglied des Produktes ist hier natürlich das Produkt der Anfangsglieder der beiden Charakteristiken. Daher wird für

$$k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_\nu \geqq 0$$

$$\chi_1^{k_1 - k_2} \chi_2^{k_2 - k_3} \cdots \chi_{\nu-1}^{k_{\nu-1} - k_\nu} \chi_\nu^{k_\nu}$$

eine Charakteristik χ mit dem Anfangsglied

$$e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)}\,{}^{2})\text{.}$$

Durch Zerlegung von χ in einfache Charakteristiken erkennt man, daß es auch eine *einfache* Charakteristik von $\mathfrak{D}$ mit dem Anfangsglied $e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)}$ gibt, sie heiße $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \gamma(k)$. Man stelle $\gamma(k)$ nach § 1, (11) dar

(12) $$\gamma(k) = \sigma(k) + \sum_\lambda \sigma(\lambda).$$

Dann gibt es umgekehrt eine Darstellung

(13) $$\sigma(k) = \gamma(k) + \sum_\mu (\pm\gamma(\mu)),$$

wo $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu)$ eine gewisse Gitterpunktsmenge durchläuft, deren Punkte alle niedriger als k sind und für die außerdem $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \cdots \geqq \mu_\nu \geqq 0$ ist. Denn für $k_1 = k_2 = \cdots = k_\nu = 0$ gibt es eine Darstellung (13)

$$\sigma(0, 0, \ldots, 0) = \gamma(0, 0, \ldots, 0) = 1,$$

---

1) Wegen der Begriffe Determinantentransformation, Produkttransformation (Kroneckersches Produkt) und Potenztransformation siehe A. Hurwitz, Zur Invariantentheorie. Math. Ann. 45, 1894, S. 381; I. Schur, Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen; (Dissertation), Berlin 1901, Abschnitt II.

2) Die in dieser Betrachtung verwendete Methode stammt von Herrn I. Schur (Dissertation). Dort wird in analoger Weise gezeigt, daß zu jedem möglichen Anfangsglied mindestens ein ganzer rationaler Homomorphismus der allgemeinen linearen Gruppe gehört.

und man schließt dann aus (12) induktiv, daß es *immer* eine Darstellung (13) gibt.

Jetzt soll gezeigt werden, daß die Charakteristiken $\gamma(k)$ die *einzigen* einfachen Charakteristiken von $\mathfrak{D}$ sind. Ist nämlich γ eine einfache Charakteristik von $\mathfrak{D}$ mit dem Anfangsglied

$$d \,.\, e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)},$$

so stelle man γ nach § 1, (11) dar

$$\gamma = d \,.\, \sigma(k) + \sum_\lambda \sigma(\lambda). \tag{14}$$

In (14) drücke man nach (13) $\sigma(k)$ und $\sigma(\lambda)$ durch die $\gamma(\varrho)$ aus; man findet dann eine Darstellung der Form

$$\gamma = d \,.\, \gamma(k) + \sum_\varrho (\pm\, \gamma(\varrho)).$$

Dabei sind alle Punkte ϱ niedriger als k, und es ist

$$\varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \cdots \geqq \varrho_\nu \geqq 0.$$

Bringt man die negativen Glieder von der linken auf die rechte Seite, so erhält man eine Formel

$$\gamma + \sum_{\varrho'} \gamma(\varrho') = d \,.\, \gamma(k) + \sum_{\varrho''} \gamma(\varrho''), \tag{15}$$

wo alle Punkte ϱ' und ϱ'' auch niedriger als k sind. In (15) stehen links und rechts Charakteristiken von $\mathfrak{D}$, aus der Gleichheit folgt [1]), daß man bei Zerlegung der linken und der rechten Seite in einfache Charakteristiken genau dieselben Bestandteile erhält. Diese Zerlegung erscheint aber in (15) schon ausgeführt. Da γ mit keinem $\gamma(\varrho'')$ übereinstimmen kann, weil deren Anfangsglieder zu niedrig sind, findet man

$$\gamma = \gamma(k). \tag{16}$$

Daraus ergibt sich $d = 1$.

I a. *Eine einfache Charakteristik von $\mathfrak{D}$ für $n = 2\nu + 1$ enthält ihr höchstes Glied genau einmal. Zu jedem möglichen Anfangsglied, d. h. zu jedem Glied $e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)}$ mit $k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_\nu \geqq 0$ gibt es eine und nur eine einfache Charakteristik $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$* [2]).

Man erhält so eine Zuordnung der einfachen Charakteristiken zu den Systemen von ν nicht negativen ganzen Zahlen.

---

1) G. Frobenius und I. Schur, Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen. Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1906, S. 209, Satz III.

2) Über die Stellung dieses Satzes in der Cartanschen Theorie, vgl. H. Weyl, Math. Zeitschrift Bd. 23, S. 271, 1925.

Jetzt sei $n = 2\nu$. Um dieselbe Schlußweise wie bei ungeradem n anwenden zu können, hat man nur zu zeigen, daß zu jedem möglichen Anfangsglied $e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)}$

$$k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots k_{\nu-1} \geqq |k_\nu|$$

eine Charakteristik von $\mathfrak{D}$ mit diesem Anfangsglied gehört. Zunächst soll das für $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{\nu-1} - \varphi_\nu)}$ bewiesen werden. Wie man leicht erkennt, ist die ν-te Determinantentransformation von $\mathfrak{D}$ reduzibel. Die Zerlegung ist in A II S. 320 mit algebraischen Hilfsmitteln durchgeführt. Man greife aus $1, 2, \ldots, n$ auf irgend eine Weise ein System ϱ von ν Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu$ heraus. Das komplementäre System, das durch Streichen der ν Zahlen ϱ in der Reihe $1, 2, \ldots, n$ entsteht, werde mit ϱ^* bezeichnet. Man bezeichne ferner die Unterdeterminante ν-ten Grades von s, die die ν Zeilen ϱ und die ν Spalten σ enthält, mit $\varDelta_{\varrho\sigma}$. Versteht man schließlich unter j 1 oder i, je nachdem ν gerade oder ungerade ist, und unter ε_ϱ die Zahl $(-1)^{\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_\nu}$, so erhält man bei der Zerlegung der ν-ten Determinantentransformation die beiden Charakteristiken

$$\chi^{(1)} = \sum_\varrho (\varDelta_{\varrho\varrho} + j\,\varepsilon_\varrho \varDelta_{\varrho\varrho^*}) \quad \text{und} \quad \chi^{(2)} = \sum_\varrho (\varDelta_{\varrho\varrho} - j\,\varepsilon_\varrho \varDelta_{\varrho\varrho^*}).$$

Dabei durchläuft ϱ alle die Indexkombinationen aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$, für die

$$\varrho_1 = 1 \qquad \varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_\nu$$

ist. Es genügt nach § 1, $s = S(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)$ zu setzen; man erhält dann $\chi^{(1)}$ und $\chi^{(2)}$ als Funktionen von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$. Ersetzt man φ_ν durch $-\varphi_\nu$, so bleibt $\varDelta_{\varrho\varrho}$ ungeändert; denn es enthält φ_ν garnicht oder nur $\cos\varphi_\nu$. Dagegen geht $\varDelta_{\varrho\varrho^*}$ in $-\varDelta_{\varrho\varrho^*}$ über; denn wenn es von 0 verschieden ist, enthält es den Faktor $\sin\varphi_\nu$, aber sonst φ_ν nicht. Daher geht $\chi^{(1)}$ in $\chi^{(2)}$ und $\chi^{(2)}$ in $\chi^{(1)}$ über. Die Summe der beiden Charakteristiken ist aber die ν-te elementarsymmetrische Funktion von $e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_\nu}, e^{-i\varphi_\nu}$; die beiden höchsten Glieder der Summe sind also

$$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{\nu-1} + \varphi_\nu)} \quad \text{und} \quad e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{\nu-1} - \varphi_\nu)}.$$

Daher muß entweder $\chi^{(1)}$ oder $\chi^{(2)}$ das Anfangsglied $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_\nu)}$ haben. Ersetzt man φ_ν durch $-\varphi_\nu$, so sieht man, daß die andere Charakteristik $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{\nu-1} - \varphi_\nu)}$ enthalten muß; da sie aber $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_\nu)}$ nicht enthalten kann, ist das Glied ihr Anfangsglied. Man bezeichnet diese Charakteristik mit $\chi_\nu^{(-)}$, die andere mit $\chi_\nu^{(+)}$. Analog wie bei ungeradem n ist die ϱ-te elementarsymmetrische Funktion von $e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_\nu}, e^{-i\varphi_\nu}$ eine Charakteristik χ_ϱ mit dem Anfangsglied $e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_\varrho)}$, $(1 \leqq \varrho < \nu)$.

Hat man nun zwei Charakteristiken von $\mathfrak{D}$: χ' mit dem Anfangsglied $e^{i(k_1\varphi_1+k_2\varphi_2+\cdots+k_\nu\varphi_\nu)}$ und χ'' mit dem Anfangsglied $e^{i(l_1\varphi_1+l_2\varphi_2+\cdots+l_\nu\varphi_\nu)}$, und ist $k_\nu . l_\nu \geqq 0$, so entsteht das Anfangsglied von $\chi' . \chi''$ durch Multiplikation dieser Anfangsglieder. Denn entsteht etwa das Anfangsglied des Produktes durch Multiplikation des Gliedes $e^{i(\varkappa_1\varphi_1+\varkappa_2\varphi_2+\cdots+\varkappa_\nu\varphi_\nu)}$ von χ' mit dem Gliede $e^{i(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots+\lambda_\nu\varphi_\nu)}$ von χ'', so kann das System

$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu$ nicht höher als $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$,

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ nicht höher als $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$,

$(k_1+l_1), (k_2+l_2), \ldots, (k_\nu+l_\nu)$ nicht höher als $(\varkappa_1+\lambda_1), (\varkappa_2+\lambda_2), \ldots, (\varkappa_\nu+\lambda_\nu)$

sein. Man schließt daraus

$$\varkappa_1 = k_1,\ \varkappa_2 = k_2,\ \ldots,\ \varkappa_{\nu-1} = k_{\nu-1}; \quad \lambda_1 = l_1,\ \lambda_2 = l_2,\ \ldots,\ \lambda_{\nu-1} = l_{\nu-1}.$$

Ferner müssen die Ungleichungen bestehen:

$$|\varkappa_\nu| \leqq |k_\nu|, \quad |\lambda_\nu| \leqq |l_\nu|, \quad |\varkappa_\nu + \lambda_\nu| \geqq |k_\nu + l_\nu|.$$

Da $k_\nu . l_\nu \geqq 0$ ist, muß sein

$$\varkappa_\nu . \lambda_\nu \geqq 0, \quad |\varkappa_\nu| = |k_\nu|, \quad |\lambda_\nu| = |l_\nu|.$$

Ist nun $k_\nu \geqq 0$, $l_\nu \geqq 0$, so ist das Glied

$$e^{i((k_1+l_1)\varphi_1+(k_2+l_2)\varphi_2+\cdots+(k_\nu+l_\nu)\varphi_\nu)}$$

höher als

$$e^{i((\varkappa_1+\lambda_1)\varphi_1+(\varkappa_2+\lambda_2)\varphi_2+\cdots+(\varkappa_\nu+\lambda_\nu)\varphi_\nu)},$$

wenn nicht $\varkappa_\nu = k_\nu$, $\lambda_\nu = l_\nu$ ist. Ist $k_\nu < 0$, $l_\nu < 0$, so müssen auch $\varkappa_\nu$ und λ_ν negativ sein, da sonst

$$e^{i(\varkappa_1\varphi_1+\varkappa_2\varphi_2+\cdots+\varkappa_\nu\varphi_\nu)} \quad \text{bezw.} \quad e^{i(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots+\lambda_\nu\varphi_\nu)}$$

die Anfangsglieder von χ' bezw. χ'' wären. Also ist auch hier $\varkappa_\nu = k_\nu$, $\lambda_\nu = l_\nu$; die Regel über das Anfangsglied des Produktes ist bewiesen.

Sind nun ν ganze Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ gegeben, die der Bedingung

$$k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_{\nu-1} \geqq |k_\nu|$$

unterliegen, so bilde man für $k_\nu \geqq 0$

$$\chi_1^{k_1 - k_2} \chi_2^{k_2 - k_3} \cdots \chi_{\nu-1}^{k_{\nu-1} - k_\nu} (\chi_\nu^{(+)})^{k_\nu},$$

für $k_\nu < 0$

$$\chi_1^{k_1 - k_2} \chi_2^{k_2 - k_3} \cdots \chi_{\nu-1}^{k_{\nu-1} - |k_\nu|} (\chi_\nu^{(-)})^{|k_\nu|}.$$

Man erhält, wie man durch wiederholte Anwendung der eben bewiesenen Regel erkennt, eine Charakteristik mit dem Anfangsglied $e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)}$. Jetzt schließt man wie bei ungeradem n weiter, und man findet den Satz

Ib. *Eine einfache Charakteristik von $\mathfrak{D}$ enthält auch für gerades n ihr höchstes Glied nur einmal. Zu jedem möglichen Anfangsglied $e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)}$, $(k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_{\nu-1} \geqq |k_\nu|)$ gibt es eine und nur eine einfache Charakteristik.*

Es sei $H(s)$ ein irreduzibler Homomorphismus von $\mathfrak{D}$, $(n = 2\nu)$. Die zugehörige einfache Charakteristik sei $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$. Man bezeichne mit u die Substitution

$$\begin{aligned} x'_\varrho &= x_\varrho \qquad\qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n-1) \\ x'_n &= -x_n. \end{aligned}$$

Dann stellt auch $H(u^{-1}su)$ einen irreduziblen Homomorphismus $\mathfrak{H}^*$ von $\mathfrak{D}$ dar. Um die Charakteristik zu berechnen, hat man nach § 1 nur $s = S(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)$ zu setzen. Dann wird aber

$$u^{-1}su = S(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\nu-1}, -\varphi_\nu).$$

Daher entsteht die Charakteristik von $\mathfrak{H}^*$ aus $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$, wenn man φ_ν durch $-\varphi_\nu$ ersetzt. Es sei zunächst $k_\nu \leqq 0$. Dann sieht man leicht ein, daß das Anfangsglied von $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ nach Ersetzen von φ_ν durch $-\varphi_\nu$ $e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_{\nu-1}\varphi_{\nu-1} - k_\nu\varphi_\nu)}$ wird. Daher hat $\mathfrak{H}^*$ die Charakteristik $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu)$. Da beim Ersetzen von φ_ν durch $-\varphi_\nu$ dieser Ausdruck dann in $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ übergehen muß, so gilt die entsprechende Tatsache auch für $k_\nu > 0$. *Ist $n = 2\nu$ und ersetzt man φ_ν durch $-\varphi_\nu$, so geht $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ in $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu)$ über.* Wegen der Symmetrieeigenschaft der Charakteristik erhält man dasselbe Ergebnis, wenn man bei irgend einem Winkel das Vorzeichen abändert.

Es sei $n \equiv 2 \pmod 4$. Ersetzt man φ_ν durch $-\varphi_\nu$, so ist hier wegen der Symmetrieeigenschaft das Ergebnis das gleiche, wie wenn man bei allen Winkeln das Vorzeichen abändert. Dann geht aber jedes Glied der Charakteristik in das konjugiert komplexe über, es gilt also hier

$$\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu) = \overline{\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)}.$$

Man erkennt, daß in diesem Fall die einfachen Charakteristiken nur für $k_\nu = 0$ reell sind. Ist $n \not\equiv 2 \pmod 4$, so sind alle Charakteristiken reell (§ 1).

Ist jetzt n wieder beliebig, so bilde man wieder die Produkte

$$(17) \left\{ \begin{array}{ll} \chi_1^{k_1-k_2} \chi_2^{k_2-k_3} \cdots \chi_{\nu-1}^{k_{\nu-1}-k_\nu} \chi_\nu^{k_\nu}, & (n = 2\nu+1) \\ \chi_1^{k_1-k_2} \chi_2^{k_2-k_3} \cdots \chi_{\nu-1}^{k_{\nu-1}-k_\nu} (\chi_\nu^{(+)})^{k_\nu} & \\ \text{oder } \chi_1^{k_1-k_2} \chi_2^{k_2-k_3} \cdots \chi_{\nu-1}^{k_{\nu-1}-|k_\nu|} (\chi_\nu^{(-)})^{|k_\nu|}, & (n = 2\nu). \end{array} \right.$$

Diese Produkte enthalten in jedem Falle $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ und zwar genau einmal, da sie das Anfangsglied genau einmal enthalten. Das entsprechende Produkt aus den Determinantentransformationen, bezw. den zu $\chi_\nu^{(+)}$ und $\chi_\nu^{(-)}$ gehörigen Homomorphismen $C_\nu^{(+)}$ und $C_\nu^{(-)}$ enthält also den zu $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ gehörigen Homomorphismus genau einmal. Da die Produkte ganze rationale homogene Homomorphismen von $\mathfrak{D}$ sind (d. h. die Koeffizienten des s zugeordneten Elementes lassen sich als ganze rationale homogene Funktionen der Koeffizienten von s schreiben), gilt das Gleiche auch für $\mathfrak{H}$. Ist ferner $n \not\equiv 2 \pmod 4$ oder im Falle $n \equiv 2 \pmod 4$, $k_\nu = 0$, so sind die Produkte aus den Determinantenformationen, $C_\nu^{(+)}$ und $C_\nu^{(-)}$ reell; daraus folgt dann[1]), daß $\mathfrak{H}$ sich in diesen Fällen durch Ähnlichkeitstransformation reell machen läßt. Im Fall $n \equiv 2 \pmod 4$, $k_\nu \neq 0$ geht das sicher nicht, da noch nicht einmal die Charakteristik reell ist.

II. *Jeder irreduzible Homomorphismus von $\mathfrak{D}$ ist ganz rational und homogen. Ist $n \not\equiv 2 \pmod 4$, so kann man durch eine Ähnlichkeitstransformation erreichen, daß er reell wird. Ist $n \equiv 2 \pmod 4$, so geht das dann und nur dann, wenn im Anfangsglied*

$$e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)}$$

der zugehörigen Charakteristik $k_\nu = 0$ ist[2]).

---

1) A. Loewy, Über die Reduzibilität der reellen Gruppen linearer Substitutionen, Trans. of the American Math. Soc. Bd. 1, 1903, S. 171; I. Schur, Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen, Trans. of the American Math. Soc. Bd. 15, 1909, S. 159.

2) Vgl. hierzu Schur A III, § 4. — Aus den Resultaten der in 1) genannten Schurschen Abhandlung kann man noch schließen, daß man die auftretenden ganzen rationalen Funktionen im Fall der Realität mit rationalen Koeffizienten, im andern Fall mit Koeffizienten aus dem Gaussschen Körper $P(i)$ an-

Mit Hilfe der Produkte (17) sollen noch einige weitere Tatsachen abgeleitet werden, die später von Bedeutung sind.

Hilfssatz 1. *Enthält die einfache Charakteristik* $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ *das Glied* $e^{i(\varkappa_1\varphi_1+\varkappa_2\varphi_2+\cdots+\varkappa_\nu\varphi_\nu)}$, *so muß*

$$\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_\nu \leqq k_1+k_2+\cdots k_\nu \tag{18}$$

sein. Ist ferner $n=2\nu$, *so gilt außerdem die Kongruenz*

$$\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_\nu \equiv k_1+k_2+\cdots+k_\nu \pmod 2. \tag{19}$$

Schließlich gilt für $n=2\nu$, $k_\nu \geqq 0$ *falls in* (18) *Gleichheit steht, die Beziehung* $\varkappa_\nu \geqq k_\nu$, *falls aber*

$$\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_\nu = k_1+k_2+\cdots+k_\nu-2$$

ist, die Beziehung $\varkappa_\nu \geqq k_\nu-1$.

Der Beweis aller dieser Behauptungen erfolgt in der Weise, daß man zeigt, daß die angegebenen Relationen für *alle* Glieder des in Betracht kommenden Produktes (17) gelten; a fortiori gelten sie dann für die Glieder von $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$. — Für alle Glieder $e^{i(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots+\lambda_\nu\varphi_\nu)}$ von χ_ϱ gilt, wie man unmittelbar sieht,

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\nu \leqq \varrho,$$

für die Glieder von $\chi_\nu^{(-)}$ gilt, da nur Glieder der ν-ten elementarsymmetrischen Funktion von $e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_\nu}, e^{-i\varphi_\nu}$ auftreten können und $e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_\nu)}$ zu $\chi_\nu^{(+)}$ gehört,

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\nu \leqq \nu-2.$$

Daher gilt für alle Glieder $e^{i(\varkappa_1\varphi_2+\varkappa_2\varphi_2+\cdots+\varkappa_\nu\varphi_\nu)}$ des Produktes (17)

$$\begin{aligned}\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_\nu &\leqq (k_1-k_2)+2(k_2-k_3)+\cdots+(\nu-1)(k_{\nu-1}-k_\nu)+\nu k_\nu\\ &= k_1+k_2+\cdots+k_\nu, \qquad (n\equiv 1 \pmod 2);\ n\equiv 0 \pmod 2),\ k_\nu\geqq 0),\\ \varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_\nu &\leqq (k_1-k_2)+2(k_2-k_3)+\cdots+(\nu-1)(k_{\nu-1}-|k_\nu|)+(\nu-2)|k_\nu|\\ &= k_1+k_2+\cdots+k_{\nu-1}+k_1, \qquad (n\equiv 0 \pmod 2),\ k_\nu<0).\end{aligned}$$

Für $n=2\nu$, $k_\nu\geqq 0$ setzen sich die Glieder $e^{i(\varkappa_1\varphi_1+\varkappa_2\varphi_2+\cdots+\varkappa_\nu\varphi_\nu)}$ des Produktes (17) durch Multiplikation von k_1-k_2 Gliedern von χ_1, k_2-k_3 Gliedern von $\chi_2, \ldots, k_{\nu-1}-k_\nu$ Gliedern von $\chi_{\nu-1}$ und k_ν Gliedern von $\chi_\nu^{(+)}$ als Faktoren zusammen. Alle diese Faktoren haben die Form $e^{i(\varepsilon_1\varphi_1+\varepsilon_2\varphi_2+\cdots+\varepsilon_\nu\varphi_\nu)}$, $\varepsilon_\varrho=0, \pm 1$. Soll $\varkappa_\nu < k_\nu-1$

---

nehmen kann. Man hat dabei zu beachten, daß für $n=2\nu$ die bei Zerlegung der ν-ten Determinantentransformation auftretenden Homomorphismen sich in dieser Weise schreiben lassen.

sein, so muß einer der folgenden drei Fälle eintreten: 1. In allen k_ν, von $\chi_\nu^{(+)}$ stammenden, Faktoren ist $\varepsilon_\nu = +1$, in mindestens zwei anderen Faktoren ist $\varepsilon_\nu = -1$. 2. In mindestens einem der aus $\chi_\nu^{(+)}$ stammenden Faktoren ist $\varepsilon_\nu = -1$. Dann muß bei diesem noch ein anderes $\varepsilon_\varrho \leqq 0$ sein, da $e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_{\nu-1}-\varphi_\nu)}$ nicht zu $\chi_\nu^{(+)}$, sondern zu $\chi_\nu^{(-)}$ gehört. 3. In mindestens einem von $\chi_\nu^{(+)}$ stammenden Faktor ist $\varepsilon_\nu = 0$. Dann muß bei diesem noch ein anderes $\varepsilon_\varrho = 0$ sein. Außerdem muß dann noch entweder in einem andern von $\chi_\nu^{(+)}$ stammenden Faktor $\varepsilon_\nu = 0$ sein, oder es muß in einem nicht aus $\chi_\nu^{(+)}$ stammenden Faktor $\varepsilon_\nu = -1$ sein. In allen diesen Fällen verschärft man leicht die oben durchgeführte Abschätzung zu

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_\nu \leqq k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu - 2.$$

Damit ist der letzte Teil der Behauptung bewiesen; in ähnlicher Weise zeigt man die anderen Teile.

Nach demselben Prinzip zeigt man auch, daß für $n = 2\nu$ $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ als einziges Glied der Form $e^{i(\varkappa_1\varphi_1+\varkappa_2\varphi_2+\cdots+\varkappa_\nu\varphi_\nu)}$ mit $\varkappa_1 = k_1$, $\varkappa_2 = k_2$, $\ldots$, $\varkappa_{\nu-1} = k_{\nu-1}$ das Anfangsglied

$$e^{i(k_1\varphi_1+k_2\varphi_2+\cdots+k_\nu\varphi_\nu)}$$

enthält. Daraus ergibt sich dann

Auch für gerades n ist das Anfangsglied des Produktes zweier einfacher Charakteristiken das Produkt der Anfangsglieder der beiden Charakteristiken.

§ 3. **Einige Hilfsbetrachtungen.**

In § 2 ist gezeigt worden, daß man zu jedem irreduziblen Homomorphismus $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{D}$ ein Kroneckersches Produkt aus Determinantentransformationen angeben kann, das ihn enthält. Wie man leicht sieht, ist eine Determinantentransformation einer orthogonalen Matrix wieder orthogonal, ebenso auch ein Kroneckersches Produkt aus orthogonalen Matrizen. (Das Analoge gilt auch für unitäre orthogonale Matrizen.) Daher kann man eine Hermitesche Gruppe $\mathfrak{G}$ angeben, die $\mathfrak{H}$ als irreduziblen Bestandteil enthält. Man kann etwa annehmen, daß $\mathfrak{G}$ in die irreduzible Gruppe $\mathfrak{H}$ und in eine (eventuell noch reduzible) Gruppe $\mathfrak{K}$ vom Grad m zerfällt, und zwar vollständig. Setzt man in der zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Hermiteschen Form die letzten m Variabeln gleich 0, so erhält man eine positiv definite Hermitesche Form, die bei den Substitutionen von $\mathfrak{H}$ ungeändert bleibt. $\mathfrak{H}$ bildet also eine

Hermitesche Gruppe. Bei passender Schreibweise (vgl. die Seite 9, Anm. 1 zitierte Arbeit von Hurwitz) ist auch die k-te Potenztransformation einer orthogonalen (unitär orthogonalen) Matrix wieder orthogonal (unitär orthogonal). Es gilt also die Regel:

Irreduzible Homomorphismen von $\mathfrak{D}$, Potenztransformationen, Determinantentransformationen von $\mathfrak{D}$, Kroneckersche Produkte aus derartigen Homomorphismen, Potenztransformationen von Potenztransformationen von $\mathfrak{D}$ usw. bilden Hermitesche Gruppen.

Bei passender Wahl der Variabeln bestehen sie also nur aus unitär orthogonalen Substitutionen. Als Hermitesche Gruppen sind sie alle vollständig reduzibel[1]).

Für zwei irreduzible Homomorphismen einer endlichen Gruppe gilt der Satz, daß ihr Kroneckersches Produkt dann und nur dann die Hauptdarstellung der Gruppe (d. i. die Darstellung, die aus lauter 1 besteht) enthält, wenn der eine Homomorphismus ähnlich zum konjugiert komplexen des anderen ist.

Es handelt sich nun um die Übertragung dieses Satzes[2]). Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei irreduzible Homomorphismen der Grade k und l von $\mathfrak{D}$. Sind A und B zusammengehörige Matrizen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, sind ferner $x_1, x_2, \ldots, x_k$ und $y_1, y_2, \ldots, y_l$ unabhängige Variable, und ist

$$(x') = A(x); \quad (y') = B(y), \tag{20}$$

so ist, wenn durch xy die kl Produkte $x_\varkappa y_\lambda$ bezeichnet werden,

$$(x'y') = A \times B(xy).$$

Daß $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ eine lineare Invariante hat, ist gleichbedeutend damit, daß es eine Bilinearform $M(x, y)$ in den x und y gibt, für die für alle A von $\mathfrak{A}$ und alle B von $\mathfrak{B}$ aus (20)

$$M(x', y') = M(x, y) \tag{21}$$

folgt. Ist M die Matrix von $M(x, y)$, so ist (21) gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} A'MB &= M, \\ MB &= A'^{-1}M. \end{aligned} \tag{22}$$

Auch die Matrizen A'^{-1} bilden eine irreduzible Darstellung $\mathfrak{A}^*$ von $\mathfrak{D}$. Es ist dann

$$M\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^* M. \tag{23}$$

1) H. Maschke, Math. Annalen Bd. 52, S. 363.
2) Zu dem folgenden vgl. W. Burnside, Acta math., Bd. 28, 1904, S. 369.

Da $M \neq 0$ ist, folgt[1]), daß $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}$ ähnlich sein müssen, und daß M bis auf einen Zahlenfaktor eindeutig bestimmt ist. Da alle Matrizen A aus $\mathfrak{A}$ nach § 1 nur Wurzeln vom absoluten Betrage 1 haben, haben $\mathfrak{A}'^{-1}$ und $\bar{A}$[2]) dieselbe Spur, also sind $\mathfrak{A}^*$ und $\bar{\mathfrak{A}}$ ähnlich[3]). Es folgt daher, daß $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ nur dann eine lineare Invariante haben kann, wenn $\bar{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{B}$ ähnlich sind, und daß in diesem Falle die Anzahl der linear unabhängigen linearen Invarianten höchstens 1 ist. Sind aber $\bar{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{B}$ ähnlich, so sind auch $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}$ ähnlich; man kann dann $M \neq 0$ so bestimmen, daß (22) erfüllt ist. Die umgekehrte Überlegung ergibt dann, daß $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ wirklich eine lineare Invariante hat. Nun ist $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ vollständig reduzibel; daher stimmt die Anzahl der linear unabhängigen linearen Invarianten mit der Anzahl überein, die angibt, wie oft $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ die Hauptdarstellung enthält. Geht man zu den Charakteristiken über, so erhält man den

Hilfssatz 2. *Sind χ_1 und χ_2 zwei einfache Charakteristiken von $\mathfrak{D}$, so enthält $\chi_1 \chi_2$ dann und nur dann die Hauptcharakteristik (d. i. die Charakteristik, die aus lauter 1 besteht), wenn $\chi_1 = \bar{\chi}_2$ ist, und zwar dann genau einmal.*

Man kann nach Hilfssatz 2 auch entscheiden, wie oft das Produkt zweier zusammengesetzter Charakteristiken die Hauptdarstellung enthält. Sind χ_1, χ_2 und χ_3 drei einfache Charakteristiken von $\mathfrak{D}$, so enthält $\chi_1 \chi_2 \chi_3$ so oft die Hauptcharakteristik, wie $\bar{\chi}_3$ in $\chi_1 \chi_2$ oder wie $\bar{\chi}_2$ in $\chi_1 \chi_3$ enthalten ist.

Hilfssatz 2*. *Sind χ_1, χ_2 und χ_3 drei einfache Charakteristiken von $\mathfrak{D}$, so enthält $\chi_1 \chi_2$ ebenso oft $\bar{\chi}_3$, wie $\bar{\chi}_2$ in $\chi_1 \chi_3$ enthalten ist.*

Bei der Anwendung dieser Regel ist zu beachten, daß die einfachen Charakteristiken nur dann nicht reell sind, wenn $n \equiv 2 \pmod 4$ und das Anfangsglied $e^{i(k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 + \cdots + k_\nu \varphi_\nu)}$ mit $k_\nu \neq 0$ ist.

Im Anschluß hieran soll noch eine Betrachtung ganz anderer Art durchgeführt werden. Es sei $r < n - 1$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ seien nicht negative ganze Zahlen. Die Anzahl a der linear unabhängigen linearen Invarianten von

$$P_{\alpha_1}(\mathfrak{D}) \times P_{\alpha_2}(\mathfrak{D}) \times \cdots \times P_{\alpha_r}(\mathfrak{D})\ ^{4)}$$

---

1) Nach den Sätzen I und II der in Anm. 2 auf S. 5 zitierten Schurschen Abhandlung. Diese Sätze werden im folgenden noch mehrfach verwendet werden.

2) Mit $\bar{A}$ wird die zu A konjugiert komplexe Matrix bezeichnet, ebenso mit $\bar{\mathfrak{A}}$ die zu $\mathfrak{A}$ konjugiert komplexe Gruppe.

3) Vgl. Anm. 1 S. 10.

4) Die k-te Potenztransformation werde, wie üblich, mit P_k bezeichnet.

läßt sich bekanntlich auch anders deuten: Man wende auf r Variablenreihen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}$ von je n unabhängigen Variabeln $x^{(\varrho)} = (x_1^{(\varrho)}, x_2^{(\varrho)}, \ldots, x_n^{(\varrho)})$ gleichzeitig eine Transformation s aus $\mathfrak{D}$ an. J sei eine ganze rationale Funktion dieser Variabeln, die bei Anwendung von s ungeändert bleibt, wie auch s in $\mathfrak{D}$ gewählt ist. Ferner soll J in den Variabeln der Reihe $x^{(\varrho)}$ homogen von der Dimension α_ϱ sein ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$). Dann ist a zugleich gleich der Anzahl der linear unabhängigen Invarianten von diesem Typus. Nach einem Satz von Study[1]) kann man alle diese Invarianten J ganz und rational durch die inneren Produkte

$$J_{\varrho\sigma} = x_1^{(\varrho)} x_1^{(\sigma)} + x_2^{(\varrho)} x_2^{(\sigma)} + \cdots + x_n^{(\varrho)} x_n^{(\sigma)}$$

darstellen. Man bestimme auf alle möglichen Weisen nicht negative ganze Zahlen $b_{\varrho\sigma}$ so, daß

$$J_{11}^{b_{11}} J_{12}^{b_{12}} \ldots J_{rr}^{b_{rr}} \tag{24}$$

in den $x^{(\varrho)}$ gerade vom Grade α_ϱ ist. Dann lehrt eine einfache algebraische Betrachtung (die in A II auf S. 309 durchgeführt ist), daß die Gesamtheit der Produkte (24) ein vollständiges System von linear unabhängigen Invarianten J bildet. Bedeutet $\mathfrak{D}_{n-1}$ die Drehungsgruppe in $n-1$ Variabeln, so kann man hier eine analoge Betrachtung durchführen. Man findet hier als vollständiges System von linear unabhängigen Invarianten J dieselben Produkte (24), wo $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{rr}$ denselben Bedingungen unterliegen. Dabei ist hier natürlich unter $J_{\varrho\sigma}$

$$x_1^{(\varrho)} x_1^{(\sigma)} + x_2^{(\varrho)} x_2^{(\sigma)} + \cdots + x_{n-1}^{(\varrho)} x_{n-1}^{(\sigma)}$$

zu verstehen. Man schließt, daß die Anzahl der linear unabhängigen Invarianten J für $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_{n-1}$ dieselbe ist. Die Anzahl der linear unabhängigen Invarianten J für $\mathfrak{D}_{n-1}$ ist wieder die Anzahl der linear unabhängigen linearen Invarianten von

$$P_{\alpha_1}(\mathfrak{D}_{n-1}) \times P_{\alpha_2}(\mathfrak{D}_{n-1}) \times \cdots \times P_{\alpha_r}(\mathfrak{D}_{n-1}).$$

Daher ergibt sich

Hilfssatz 3. *Ist $r < n-1$, sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ nicht negative ganze Zahlen, und bedeutet $\mathfrak{D}_{n-1}$ die Drehungsgruppe in $n-1$ Variabeln, so enthält $P_{\alpha_1}(\mathfrak{D}) \times P_{\alpha_2}(\mathfrak{D}) \times \cdots \times P_{\alpha_r}(\mathfrak{D})$ ebenso oft die Hauptdarstellung von $\mathfrak{D}$, wie $P_{\alpha_1}(\mathfrak{D}_{n-1}) \times P_{\alpha_2}(\mathfrak{D}_{n-1}) \times \cdots \times P_{\alpha_r}(\mathfrak{D}_{n-1})$ die Hauptdarstellung von $\mathfrak{D}_{n-1}$ enthält.*

---

1) E. Study, Leipziger Berichte 1897, S. 443.

Die Hilfssätze 2 und 3 bilden die Grundlage für die spätere Untersuchung.

§ 4. Über den Zusammenhang zwischen den Homomorphismen der Gruppen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$.

Ist n ungerade, so lassen sich die Homomorphismen der erweiterten orthogonalen Gruppe $\mathfrak{D}'$ sofort auf die der Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ zurückführen, der Fall hat kein besonderes Interesse.

Es sei $n = 2\nu$; $H(t)$ sei ein Homomorphismus m-ten Grades von $\mathfrak{D}'$. Ist s in $\mathfrak{D}$ enthalten, so setze man

$$H(s) = K(s).$$

Dann bilden die Matrizen $K(s)$ einen Homomorphismus $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{D}$. Man bezeichne mit u die Matrix, die aus der Einheitsmatrix n-ten Grades E_n entsteht, indem man in der letzten Zeile die 1 durch -1 ersetzt. Ist $F(s)$ irgend ein Homomorphismus von $\mathfrak{D}$, so liefert auch $F(u^{-1}su)$ eine Darstellung. Diese werde im folgenden mit $F^*(s)$, bezw. $\mathfrak{F}^*$, bezeichnet, analog seien die Bezeichnungen auch bei anderen Homomorphismen von $\mathfrak{D}$. — Man setze

$$H(u) = M. \tag{25}$$

Dann gilt:

$$M^2 = H(u)^2 = H(u^2) = E_m \tag{26}$$

$$H(s).M = H(s)H(u) = H(u)H(u^{-1}su) = M.H(u^{-1}su)$$

$$K(s).M = MK^*(s) \quad \text{für } s < \mathfrak{D}. \tag{27}$$

Die Gruppe $\mathfrak{K}$ kann reduzibel sein, dann kann man sie schon zerfallend annehmen. Es soll aber gezeigt werden, daß $\mathfrak{K}$ nicht mehr als zwei irreduzible Bestandteile haben kann. Wäre das nicht richtig, so enthalte etwa $\mathfrak{K}$ als Bestandteile $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$. Dabei soll von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{U}$ Irreduzibilität vorausgesetzt werden, während $\mathfrak{S}$ auch reduzibel sein kann und auch ganz fehlen darf. Bei passender Bezeichnung kann man dann (27) auch schreiben

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} R(s) & 0 & 0 & 0 \\ * & S(s) & 0 & 0 \\ * & * & T(s) & 0 \\ * & * & * & U(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^*(s) & 0 & 0 & 0 \\ * & S^*(s) & 0 & 0 \\ * & * & T^*(s) & 0 \\ * & * & * & U^*(s) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{28}$$

Dabei sind Größen, die nicht weiter interessieren, durch das Zeichen $*$ ersetzt. Komposition der ersten Zeile und der letzten Spalte links und rechts ergibt

$$R(s)\, M_4 = M_4\, U^*(s), \quad \mathfrak{R} M_4 = M_4 \mathfrak{U}^*.$$

Es kann nicht $M_4 = 0$ sein; denn sonst stände in allen Matrizen von $\mathfrak{K}$ und in allen Matrizen von $\mathfrak{K} M$, d. h. in allen Matrizen von $\mathfrak{H}$, in der ersten Zeile, letzten Spalte 0; dann könnte es in $\mathfrak{H}$ nicht n^2 linear unabhängige Elemente geben, nach dem Burnsideschen Satz [1]) wäre $\mathfrak{H}$ reduzibel. Also ist M_4 eine quadratische Matrix mit $|M_4| \neq 0$. Die Zeilenzahl von M_3 ist gleich der Zeilenzahl von M_4, folglich auch gleich der Spaltenzahl von M_4. Daher kann man die Matrix bilden

$$P = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -M_4^{-1} M_3 & M_4^{-1} \end{pmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & M_4 \end{pmatrix}.$$

Denkt man sich auf $\mathfrak{H}$ eine Ähnlichkeitstransformation mit dieser Matrix angewendet, so erkennt man, daß man von vornherein annehmen kann

$$M_3 = 0, \quad M_4 = E.$$

Dann steht aber in allen Matrizen von $\mathfrak{H} = \mathfrak{K} + \mathfrak{K} M$ an der Stelle von M_3 0, und das steht nach dem Burnsideschen Satz mit der Irreduzibilität von $\mathfrak{H}$ im Widerspruch. Also kann $\mathfrak{K}$ wirklich nur einen oder zwei irreduzible Bestandteile haben.

a) Ist $\mathfrak{K}$ irreduzibel, so folgt aus (27), daß $K(s)$ und $K^*(s)$ ähnliche Homomorphismen von $\mathfrak{D}$ sind. Ist die Charakteristik von $K(s)$ $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$, so ist nach § 2 die von $K^*(s) = K(u^{-1} s u)$ $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu)$. Es gilt dann also:

$$\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu).$$

Also muß $k_\nu = 0$ sein. Ist umgekehrt $K(s)$ ein irreduzibler Homomorphismus, bei dem $k_\nu = 0$ ist, so kann man N $(N \neq 0)$ so bestimmen, daß

$$N^{-1} K(s)\, N = K^*(s) \tag{29}$$

ist. N ist dann bis auf einen Zahlenfaktor eindeutig bestimmt.

---

1) W. Burnside, Proc. of the London Math. Soc. Ser. 2, Bd. 3, 1905, S. 430.

In (29) ersetze man s durch $u^{-1}su$

(30) $$N^{-1}K^*(s)N = K(s).$$

Aus (29) und (30) folgt, daß N^2 mit allen Matrizen der irreduziblen Gruppe $\mathfrak{K}$ vertauschbar sein muß. Daher ist N^2 von der Form cE $(c \neq 0)$. Man dividiere N durch $\sqrt{c}$, die entstehende Matrix heiße M; es gilt dann

(31) $$M^2 = E, \quad M^{-1}K(s)M = K^*(s) = K(u^{-1}su).$$

M ist bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmt. Setzt man

$$H(s) = K(s), \quad H(u) = M.$$

so wird dadurch, wie eine einfache Rechnung ergibt, ein Homomorphismus von $\mathfrak{D}'$ definiert, der irreduzibel ist, da ja $\mathfrak{K}$ schon irreduzibel war. Man kann also in diesem Fall $\mathfrak{K}$ auf zwei Weisen zu einem Homomorphismus von $\mathfrak{D}'$ erweitern. Daß diese beiden Homomorphismen nicht ähnlich sind, soll unten gezeigt werden.

b) Enthält $\mathfrak{K}$ zwei irreduzible Bestandteile, so sei

$$K(s) = \begin{pmatrix} R(s) & 0 \\ Z(s) & S(s) \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ N_1 & N_2 \end{pmatrix}.$$

Eine analoge Betrachtung wie oben bei der Ähnlichkeitstransformation von $\mathfrak{H}$ mit P läßt erkennen, daß man annehmen kann

$$M_2 = E, \quad M_1 = 0.$$

Aus (26) folgt dann

$$N_1 = E, \quad N_2 = 0.$$

Mit Hilfe einer einfachen Rechnung schließt man weiter

$$R^*(s) = S(s), \quad Z(s) = 0.$$

(32) $$H(s) = K(s) = \begin{pmatrix} R(s) & 0 \\ 0 & R^*(s) \end{pmatrix}; \quad H(u) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Geht man umgekehrt von irgend einem irreduziblen Homomorphismus $R(s)$ von $\mathfrak{D}$ aus und definiert H mit Hilfe dieser beiden Relationen, so sind (26) und (27) erfüllt; man erhält daher einen Homomorphismus $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{D}'$. Es fragt sich nur, wann dieser irreduzibel ist. Gehört zu $R(s)$ die Charakteristik $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ und ist $k_\nu = 0$, so bestimme man wie oben unter a) dazu die Matrix M. Dann wird auch durch

$$H_1(s) = \begin{pmatrix} R(s) & 0 \\ 0 & R(s) \end{pmatrix}; \quad H_1(u) = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -M \end{pmatrix}$$

ein Homomorphismus $\mathfrak{H}_1$ von $\mathfrak{D}'$ definiert. Für alle Substitutionen t aus $\mathfrak{D}'$ stimmen die Charakteristiken von $H(s)$ und $H_1(s)$ überein; da aber $H_1(s)$ reduzibel ist, kann $H(s)$ nicht irreduzibel sein. Ist dagegen in der Charakteristik $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ von $R(s)$ $k_\nu \neq 0$, so ist $\mathfrak{H}$ irreduzibel. Denn sonst könnte der durch einen irreduziblen Bestandteil von $\mathfrak{H}$ erzeugte Homomorphismus von $\mathfrak{D}$ nur $R(s)$ oder $R^*(s)$ sein. Es ist aber schon gezeigt, daß man diese Homomorphismen von $\mathfrak{D}$ nicht zu einem Homomorphismus von $\mathfrak{D}'$ erweitern kann. Nach § 2 kann man in jedem Fall alle Matrizen $R(s)$ unitär orthogonal annehmen. Dann sind alle $R^*(s) = R(u^{-1} s u)$ und daher auch der durch (32) definierte Homomorphismus $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{D}'$ unitär. Jeder irreduzible Homomorphismus von $\mathfrak{D}'$ kommt in einem solchen $\mathfrak{H}$ als Bestandteil vor, muß also selber eine Hermitesche Gruppe bilden. *Alle irreduziblen Homomorphismen von $\mathfrak{D}'$, ferner alle Potenztransformationen von $\mathfrak{D}'$, Kroneckerschen Produkte von Potenztransformationen von $\mathfrak{D}'$, usw. bilden Hermitesche Gruppen.*

Den letzten Teil dieser Aussage erkennt man analog wie bei der Gruppe $\mathfrak{D}$. Man kann jetzt die Schlußweise vom Beweis des Hilfssatzes 2 auch hier anwenden. Beachtet man noch, daß nach § 1 hier alle Charakteristiken reell sind, so erhält man den

Hilfssatz 4. *Sind χ_1 und χ_2 zwei einfache Charakteristiken von $\mathfrak{D}'$, so enthält $\chi_1\chi_2$ dann und nur dann die Hauptcharakteristik von $\mathfrak{D}'$, wenn $\chi_1 = \chi_2$ ist, und dann genau einmal. Ist χ_3 eine dritte einfache Charakteristik, so ist χ_3 so oft in $\chi_1\chi_2$ enthalten wie χ_2 in $\chi_1\chi_3$.*

Es soll jetzt gezeigt werden, daß sich diejenigen irreduziblen Homomorphismen $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{D}$ mit der Charakteristik $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$, für die $k_\nu = 0$ ist, auf zwei wesentlich *verschiedene* Arten zu Homomorphismen von $\mathfrak{D}'$ erweitern lassen. Es sei λ die lineare Charakteristik von $\mathfrak{D}'$, bei der allen eigentlichen Drehungen 1, den anderen Elementen von $\mathfrak{D}'$ -1 zugeordnet ist. $\mathfrak{H}_1$ sei ein Homomorphismus von $\mathfrak{D}'$, der aus $\mathfrak{R}$ durch Erweiterung entsteht, es sei $\mathfrak{H}_2 = \lambda\mathfrak{H}_1$. Dann soll bewiesen werden, daß $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ nicht ähnlich sind.

Wären sie nämlich ähnlich, so enthielte $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ nach Hilfssatz 4 die Hauptdarstellung von $\mathfrak{D}'$. Durch Multiplikation mit λ erkennt man dann, daß $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_1$ λ als irreduziblen Bestandteil enthält. Nach Hilfssatz 4 enthält aber $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_1$ auch die Hauptdarstellung von $\mathfrak{D}'$, also muß dann der durch $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_1$ erzeugte Homomorphismus von $\mathfrak{D}$ zweimal die Hauptdarstellung von $\mathfrak{D}$ enthalten. Es handelt sich aber dabei um das Produkt $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$, das nach Hilfssatz 2 nur einmal die Hauptdarstellung von $\mathfrak{D}$ enthält. Daher wird man auf einen Widerspruch geführt. Geht man zu den Charakteristiken über, so können wir unsere Resultate so aussprechen:

Hilfssatz 5: *Zu jedem System von ν ganzen Zahlen*

$$k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_\nu \geqq 0$$

gehört für $k_\nu > 0$ eine einfache Charakteristik $A^{(0)}(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ von $\mathfrak{D}'$, für $k_\nu = 0$ gehören dazu zwei einfache Charakteristiken $A^{(0)}(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ und $A^{(1)}(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$. Man erhält auf diese Weise alle einfachen Charakteristiken von $\mathfrak{D}'$. Betrachtet man die Charakteristiken nur für eigentliche Drehungen, so gilt:

$$A^{(0)}(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) + \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu) \quad \text{für } k_\nu > 0,$$

$$A^{(0)}(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = A^{(1)}(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \qquad \text{für } k_\nu = 0.$$

Schließlich läßt sich die Schlußweise, die zum Beweise des Hilfssatzes 3 in § 3 führte, auch hier anwenden. Mit Hilfe des Studyschen Satzes findet man:

Hilfssatz 6: *Es bedeute $\mathfrak{D}_{n+1}$ die Drehungsgruppe in $n+1$ Variabeln. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ nicht negative ganze Zahlen und ist $r \leqq n$, so enthält $P_{\alpha_1}(\mathfrak{D}') \times P_{\alpha_2}(\mathfrak{D}') \times \cdots \times P_{\alpha_r}(\mathfrak{D}')$ ebenso oft die Hauptdarstellung von $\mathfrak{D}'$, wie $P_{\alpha_1}(\mathfrak{D}_{n+1}) \times P_{\alpha_2}(\mathfrak{D}_{n+1}) \times \cdots \times P_{\alpha_r}(\mathfrak{D}_{n+1})$ die von $\mathfrak{D}_{n+1}$ enthält.*

II. ABSCHNITT.

§ 5. Über Kroneckersche Produkte aus Potenztransformationen von $\mathfrak{D}$.

Es sei $a \geqq 0$. Dann sei p_a die a-te Wronskische Funktion von

$$e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_\nu}, e^{-i\varphi_\nu} \quad \text{für } n = 2\nu$$

$$1, e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_\nu}, e^{-i\varphi_\nu} \quad \text{für } n = 2\nu+1.$$

Man setze für $k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_\nu > 0$, $n = 2\nu$:

$$(33) \quad \begin{cases} \Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) + \gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu), \\ \Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, 0) = \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, 0), \\ \text{für } n = 2\nu+1\colon \Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu). \end{cases}$$

Jede Charakteristik von $\mathfrak{D}$ ($n = 2\nu$), die ungeändert bleibt, wenn man φ_ν durch $-\varphi_\nu$ ersetzt, enthält ebenso oft $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu)$ wie $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu)$ (vgl. § 2). Man kann sie daher als Summe von Charakteristiken $\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ darstellen.

Hilfssatz 7: *Jedes $\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ läßt sich in der Form darstellen*

$$\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \sum_\alpha \pm p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_\nu},$$

wo für alle Gitterpunkte $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu \leqq k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu$$

ist.

Beweis: Es sei zunächst p_a die a-te Wronskische Funktion von n unabhängigen Variabeln $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Man bilde

$$d = \begin{vmatrix} p_{k_1} & p_{k_1+1} & \cdots & p_{k_1+\nu-1} \\ p_{k_2-1} & p_{k_2} & \cdots & p_{k_2+\nu-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k_\nu-\nu+1} & p_{k_\nu-\nu+2} & \cdots & p_{k_\nu} \end{vmatrix}.$$

Dann ist leicht zu sehen[1]), daß d eine ganze rationale Funktion von $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ von der Dimension $k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu$ ist, deren Leitglied bei lexikographischer Anordnung der Glieder

$$\omega_1^{k_1} \omega_2^{k_2} \ldots \omega_\nu^{k_\nu}$$

wird. Man setze jetzt

für $n = 2\nu$ $\quad \omega_\varrho = e^{i\varphi_\varrho},\ \omega_{\nu+\varrho} = e^{-i\varphi_\varrho}$ $\quad (\varrho = 1, 2, \ldots, \nu)$

für $n = 2\nu+1$ $\quad \omega_\varrho = e^{i\varphi_\varrho},\ \omega_{\nu+\varrho} = e^{-i\varphi_\varrho},\ \omega_{2\nu+1} = 1$ $\quad (\varrho = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Dann geht d in einen Ausdruck der Form

$$\sum_\varkappa e^{i(\varkappa_1 \varphi_1 + \varkappa_2 \varphi_2 + \cdots + \varkappa_\nu \varphi_\nu)}$$

über, wo $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_\nu \leqq k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu$ ist. d bleibt ungeändert, wenn man $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ irgendwie permutiert oder die Vorzeichen bei den Winkeln abändert. Daher gibt es eine Darstellung:

$$(34) \qquad d = \sum_\lambda \pm \Gamma(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu),$$

wo stets $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\nu \leqq k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu$ ist. Das Anfangsglied von d ist $e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)}$. Daher kommt in der Darstellung (34) von d $\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ einmal mit dem $+$ Zeichen vor, und sonst nur Charakteristiken, die niedriger als $\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$

1) I. Schur, Dissertation, S. 49. Man kann auch statt d die Determinanten $\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ nehmen, die in § 6 eingeführt werden.

sind. Man kann dann (34) auch in der Form schreiben

$$d = \Gamma k_1, k_2, \ldots, k_\nu) + \sum_\mu \pm \Gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu),$$

wo für alle μ

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\nu \leqq k_1 + k_2 + \cdots k_\nu$$

ist und μ immer niedriger als k ist. Andrerseits findet man durch Entwicklung der Determinante d, daß sich d linear durch Produkte von ν Wronskischen Funktionen darstellen läßt.

$$(35) \quad d = \sum_\beta \pm p_{\beta_1} p_{\beta_2} \cdots p_{\beta_\nu} = \Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) + \sum_\mu \pm \Gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu).$$

Dabei ist stets $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu = k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu$.

Nun ist $\Gamma(0, 0, \ldots, 0) = 1 = p_0^\nu$. Nimmt man an, daß Hilfssatz 7 schon für alle $\Gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu)$, $(\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \cdots \geqq \mu_\nu \geqq 0)$, bewiesen sei, für die μ niedriger als k ist, so folgt aus (35) sofort die Existenz einer Darstellung

$$(36) \quad \Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \sum_\alpha \pm p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_\nu},$$

wo stets $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu \leqq k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu$ ist.

Damit ist Hilfssatz 7 bewiesen. Man kann bei der Darstellung (36) die $p_\alpha = 1$ weglassen, für die $\alpha = 0$ ist.

Die Drehungsgruppe in $n-1$ Variabeln werde mit $\mathfrak{D}_{n-1}$ bezeichnet. Es sei $n = 2\nu$ gerade, $(n \geqq 4)$; p'_a und $\Gamma'(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1})$ mögen für $n-1$ analoge Bedeutung haben wie sonst für den Grad n p_a und $\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$; es sei also p'_a die a-te Wronskische Funktion von $e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_{\nu-1}}, e^{-i\varphi_{\nu-1}}, 1$.

Hilfssatz 8: *Ist für* $k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_{\nu-1} \geqq 0$ *die Darstellung nach* (36)

$$\Gamma'(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}) = \sum_\alpha \pm p'_{\alpha_1} p'_{\alpha_2} \cdots p'_{\alpha_{\nu-1}},$$

so ist:

$$\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}; 0) = \sum_\alpha \pm p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{\nu-1}},$$

wo α in beiden Summen dieselben Gitterpunktsmengen durchläuft und die Vorzeichen bei entsprechenden Summanden dieselben sind.

Beweis: Es sei

$$(37) \quad \Gamma'(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}) = \sum_\alpha \pm p'_{\alpha_1} p'_{\alpha_2} \cdots p'_{\alpha_{\nu-1}}$$

$$(38) \quad \Gamma = \sum_\alpha \pm p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{\nu-1}}.$$

Bildet man $(\Gamma'(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}))^2$, so kann man es in der Form schreiben

(39) $$(\Gamma'(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}))^2 = \sum_{\varrho} p'_{\varrho_1} p'_{\varrho_2} \cdots p'_{\varrho_{2\nu-2}} - \sum_{\sigma} p'_{\sigma_1} p'_{\sigma_2} \cdots p'_{\sigma_{2\nu-2}},$$

es wird

(40) $$\Gamma^2 = \sum_{\varrho} p_{\varrho_1} p_{\varrho_2} \cdots p_{\varrho_{2\nu-2}} - \sum_{\sigma} p_{\sigma_1} p_{\sigma_2} \cdots p_{\sigma_{2\nu-2}}.$$

Dabei durchlaufen ϱ und σ in (39) und (40) dieselben Gitterpunktsmengen. Nach Hilfssatz 2 enthält die Charakteristik auf der linken Seite von (39) genau einmal die Hauptcharakteristik von $\mathfrak{D}_{n-1}$. In (39) ist auf der rechten Seite jede der beiden Summen eine Charakteristik von $\mathfrak{D}_{n-1}$; stellt man sie beide durch die einfachen Charakteristiken von $\mathfrak{D}_{n-1}$ dar, so enthält die erste Summe also einmal mehr die Hauptcharakteristik von $\mathfrak{D}_{n-1}$ als die 2. Summe. Stellt man ebenso in (40) rechts die Summen durch die einfachen Charakteristiken von $\mathfrak{D}$ dar, so folgt aus Hilfssatz 3, daß auch hier die erste Summe einmal mehr die Hauptcharakteristik von $\mathfrak{D}$ enthält als die zweite Summe. Stellt man also Γ^2 linear durch die $\Gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$ dar (was auf eine und nur eine Weise geht), so kommt $\Gamma(0, 0, \ldots, 0)$ genau einmal mit dem $+$Zeichen vor. Man kann auch Γ linear durch die $\Gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$ darstellen; es sei

(41) $$\Gamma = \sum_{\lambda} d_\lambda \Gamma(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu) + \sum_{\mu} d_\mu \Gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{\nu-1}, 0),$$

wo $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_\nu > 0$ und $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \cdots \geqq \mu_{\nu-1} \geqq \mu_\nu = 0$ ist, und wo λ und μ gewisse Mengen von Gitterpunkten durchlaufen, die keinen Punkt mehrfach enthalten; d_λ und d_μ sind dabei ganze Zahlen. Aus Hilfssatz 2 und (33) ergibt sich, daß die Charakteristik $\Gamma(a_1, a_2 \ldots, a_\nu)\, \Gamma(b_1, b_2, \ldots, b_\nu)$ nur dann die Hauptcharakteristik von $\mathfrak{D}$ enthält, wenn $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_\nu = b_\nu$ ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, so enthält das Produkt einmal oder zweimal die Hauptcharakteristik, je nachdem $a_\nu = 0$ oder $a_\nu > 0$ ist. Die Darstellung von Γ^2 durch die $\Gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$ kann man finden, indem man (41) quadriert und dann alle rechts auftretenden Produkte durch die einfachen Charakteristiken ausdrückt. Dann kommt $\Gamma(0, 0, \ldots, 0)$ mit dem Koeffizienten $2\sum_{\lambda} d_\lambda^2 + \sum_{\mu} d_\mu^2$ vor; es folgt also

$$2\sum_{\lambda} d_\lambda^2 + \sum_{\mu} d_\mu^2 = 1.$$

Daher sind alle Zahlen $d_\lambda = 0$, und nur für ein System μ $d_\mu \neq 0$ und zwar $d_\mu = \pm 1$. Also ist

(42) $$\Gamma = \pm \Gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{\nu-1}, 0).$$

Setzt man in (38) $\varphi_\nu = 0$, so wird $p_\alpha = p'_\alpha + p'_{\alpha-1} + \cdots + p'_0$, wie man unmittelbar sieht, und daher ergibt sich

$$\Gamma = \sum_\alpha \pm p'_{\alpha_1} p'_{\alpha_2} \cdots p'_{\alpha_{\nu-1}} + \sum_\beta \pm p'_{\beta_1} p'_{\beta_2} \cdots p'_{\beta_{\nu-1}}; \qquad (\varphi_\nu = 0),$$

wo $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{\nu-1} < k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu$ ist; also nach (37)

$$(43) \qquad \Gamma = \Gamma'(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}) + \sum_\beta \pm p'_{\beta_1} p'_{\beta_2} \cdots p'_{\beta_{\nu-1}}.$$

Daher enthält Γ für $\varphi_\nu = 0$ das Glied $+ e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_{\nu-1}\varphi_{\nu-1})}$, also enthält Γ ein Glied $+ e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_{\nu-1}\varphi_{\nu-1} + k_\nu\varphi_\nu)}$. Da Γ sich nicht ändert, wenn man φ_ν durch $-\varphi_\nu$ ersetzt, kann man annehmen $k_\nu \geqq 0$. In (42) muß das + Zeichen gelten, da sonst Γ nur aus Gliedern $- e^{i(\varrho_1\varphi_1 + \varrho_2\varphi_2 + \cdots + \varrho_\nu\varphi_\nu)}$ bestände.

Ist $e^{i(\varrho_1\varphi_1 + \varrho_2\varphi_2 + \cdots + \varrho_\nu\varphi_\nu)}$ ein Glied von

$$\Gamma = \Gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{\nu-1}, 0),$$

so ist nach Hilfssatz 1

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_\nu \leqq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{\nu-1},$$

also:

$$(44) \qquad k_1 + k_2 + \cdots + k_{\nu-1} + k_\nu \leqq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{\nu-1}.$$

Da andererseits in

$$\Gamma'(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}) = \sum_\alpha \pm p'_{\alpha_1} p'_{\alpha_2} \cdots p'_{\alpha_{\nu-1}}$$

stets $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{\nu-1} \leqq k_1 + k_2 + \cdots + k_{\nu-1}$ ist, gilt für alle Glieder $e^{i(\varrho_1\varphi_1 + \varrho_2\varphi_2 + \cdots + \varrho_\nu\varphi_\nu)}$ von $\Gamma = \sum_\alpha \pm p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{\nu-1}}$

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_\nu \leqq k_1 + k_2 + \cdots + k_{\nu-1}.$$

Nimmt man für $e^{i(\varrho_1\varphi_1 + \varrho_2\varphi_2 + \cdots + \varrho_\nu\varphi_\nu)}$ das Anfangsglied

$$e^{i(\mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \cdots + \mu_{\nu-1}\varphi_{\nu-1})},$$

so folgt:

$$(45) \qquad \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{\nu-1} \leqq k_1 + k_2 + \cdots + k_{\nu-1}.$$

Wegen $k_\nu \geqq 0$ folgt aus (44) und (45): $k_\nu = 0$

$$(46) \qquad \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{\nu-1} = k_1 + k_2 + \cdots + k_{\nu-1}.$$

Dann muß für $\varphi_\nu = 0$ $e^{i(\mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \cdots + \mu_{\nu-1}\varphi_{\nu-1})}$ in (43) links im Summanden $\Gamma'(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1})$ vorkommen und mit dessen Anfangsglied übereinstimmen. Also folgt:

$$\mu_1 = k_1,\ \mu_2 = k_2,\ \ldots,\ \mu_{\nu-1} = k_{\nu-1},$$

(47) $$\Gamma = \Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, 0), \quad \text{w. z. b. w.}$$

In § 4 sind für die Charakteristiken von $\mathfrak{D}'$ die Symbole $A^{(0)}(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$, $A^{(0)}(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, 0)$ und $A^{(1)}(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, 0)$ eingeführt worden. Über die oberen Indizes ist dabei noch nicht verfügt worden. Es sei t eine beliebige Matrix von $\mathfrak{D}'$, r_a sei die a-te Wronskische Funktion ihrer Wurzeln.

Hilfssatz 9: *Es sei $n = 2\nu$ gerade. Ist $k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_\nu \geqq 0$,*

$$\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \sum_\alpha \pm p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_\nu}$$

die Darstellung nach Hilfssatz 7, so ist bei passender Bezeichnung:

$$A^{(0)}(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \sum_\alpha \pm r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \cdots r_{\alpha_\nu};$$

dabei durchläuft in beiden Summen α dieselben Gitterpunkte, die Vorzeichen bei entsprechenden Gliedern sind gleich zu wählen.

Beweis: Es sei $l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots \geqq l_{\nu-1} \geqq 0$, $n > 2$. Dann gibt es nach Hilfssatz 8 eine Darstellung

$$\Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}, 0) = \sum_\beta \pm p_{\beta_1} p_{\beta_2} \cdots p_{\beta_{\nu-1}}.$$

Also gibt es ein Produkt $p_{\beta_1} p_{\beta_2} \cdots p_{\beta_{\nu-1}}$, das $\Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}, 0)$ enthält. Man denke sich die Charakteristik von $\mathfrak{D}'$ $r_{\beta_1} r_{\beta_2} \cdots r_{\beta_{\nu-1}}$ in einfache Charakteristiken zerlegt:

(48) $$\begin{cases} r_{\beta_1} r_{\beta_2} \cdots r_{\beta_{\nu-1}} = d^{(0)} A^{(0)}(l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}, 0) + d^{(1)} A^{(1)}(l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}, 0) \\ \qquad\qquad + \sum_\mu s_\mu^{(0)} A^{(0)}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu) \\ \qquad + \sum_\lambda \left(r_\lambda^{(0)} A^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu-1}, 0) + r_\lambda^{(1)} A^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu-1}, 0)\right). \end{cases}$$

Dabei durchläuft λ alle Gitterpunkte $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_{\nu-1} \geqq \lambda_\nu = 0$, mit Ausnahme von $l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}, 0$; μ durchläuft alle Gitterpunkte $\mu_1 \geqq \cdots \geqq \mu_\nu > 0$. Von den nicht negativen ganzen Zahlen $d^{(0)}, d^{(1)}, r_\lambda^{(0)}, r_\lambda^{(1)}, s_\mu^{(0)}$ sind nur endlich viele von 0 verschieden. Betrachtet man (48) nur für die Matrizen s aus $\mathfrak{D}$, so geht r_β in p_β über, $A^{(e)}(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$ in $\Gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$, (§ 4). Daher wird:

(49) $$\begin{cases} p_{\beta_1} p_{\beta_2} \cdots p_{\beta_{\nu-1}} = (d^{(0)} + d^{(1)}) \Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}, 0) \\ \qquad + \sum_\lambda (r_\lambda^{(0)} + r_\lambda^{(1)}) \Gamma(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu-1}, 0) + \sum_\mu s_\mu^{(0)} \Gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu). \end{cases}$$

Nach Voraussetzung ist $d^{(0)}+d^{(1)}>0$. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ irgend ν nicht negative ganze Zahlen; es sei analog

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \cdots r_{\alpha_\nu} = c^{(0)} A^{(0)}(l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}, 0) + c^{(1)} A^{(1)}(l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}, 0) \\ + \sum_\mu u_\mu^{(0)} A^{(0)}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu) \\ + \sum_\lambda (t_\lambda^{(0)} A^{(0)}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu-1}, 0) + t_\lambda^{(1)} A^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu-1}, 0)), \end{aligned}\right.$$

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_\nu} = (c^{(0)}+c^{(1)})\, \Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}, 0) + \sum_\mu u_\mu^{(0)} \Gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu) \\ + \sum_\lambda (t_\lambda^{(0)} + t_\lambda^{(1)})\, \Gamma(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu-1}, 0). \end{aligned}\right.$$

Man multipliziere (48) und (50), (49) und (51). Da man auf der linken Seite Produkte von $2\nu-1<n$ Wronskischen Funktionen hat, folgt aus den Hilfssätzen 3 und 6, daß $r_{\beta_1} r_{\beta_2} \cdots r_{\beta_{\nu-1}}\, r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \cdots r_{\alpha_\nu}$ ebenso oft die Hauptcharakteristik von $\mathfrak{D}'$ enthält, wie

$$p_{\beta_1} p_{\beta_2} \cdots p_{\beta_{\nu-1}}\; p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_\nu}$$

die von $\mathfrak{D}$ enthält. Andererseits enthält nach Hilfssatz 4 das erste Produkt die Hauptcharakteristik von $\mathfrak{D}'$ in der Vielfachheit

$$d^{(0)} c^{(0)} + d^{(1)} c^{(1)} + \sum_\lambda (t_\lambda^{(0)} r_\lambda^{(0)} + t_\lambda^{(1)} r_\lambda^{(1)}) + \sum_\mu u_\mu^{(0)} s_\mu^{(0)},$$

das zweite Produkt die von $\mathfrak{D}$ nach Hilfssatz 2 in der Vielfachheit

$$(d^{(0)}+d^{(1)})(c^{(0)}+c^{(1)}) + \sum_\lambda (r_\lambda^{(0)}+r_\lambda^{(1)})(t_\lambda^{(0)}+t_\lambda^{(1)}) + 2\sum_\mu u_\mu^{(0)} s_\mu^{(0)}.$$

Diese beiden Zahlen müssen gleich sein, also ist

$$(52)\qquad d^{(0)} c^{(1)} + d^{(1)} c^{(0)} + \sum_\lambda (r_\lambda^{(0)} t_\lambda^{(1)} + r_\lambda^{(1)} t_\lambda^{(0)}) + \sum_\mu u_\mu^{(0)} s_\mu^{(0)} = 0.$$

Da es sich um nicht negative Zahlen handelt, folgt

$$(53)\qquad d^{(0)} c^{(1)} = d^{(1)} c^{(0)} = 0.$$

Zu jedem System l denke man sich das System $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-1})$ fest gewählt und setze jetzt zunächst $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_{\nu-1} = \beta_{\nu-1}$, $\alpha_\nu = 0$. Dann wird $d^{(0)} = c^{(0)}$, $d^{(1)} = c^{(1)}$; aus (53) folgt also: $d^{(0)} . d^{(1)} = 0$. Vertauscht man eventuell die Bezeichnung

$$A^{(0)}(l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}, 0) \text{ mit } A^{(1)}(l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}, 0),$$

so kann man annehmen $d^{(1)}=0$. Da $d^{(0)}+d^{(1)}>0$ war, ist $d^{(0)}>0$. Denkt man sich jetzt wieder $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ beliebig gewählt, so folgt aus (53)

$$d^{(0)} c^{(1)} = 0, \quad c^{(1)} = 0.$$

Kein Produkt $r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \dots r_{\alpha_\nu}$ kann $A^{(1)}(l_1, l_2, \dots, l_{\nu-1}, 0)$ enthalten.

In dieser Weise denke man sich die Bezeichnung für alle Systeme l $(l_1 \geqq l_2 \geqq \dots \geqq l_{\nu-1} \geqq l_\nu = 0)$ festgelegt. Dann kann man $r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \dots r_{\alpha_\nu}$ als Summe von Ausdrücken $A^{(0)}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\nu)$ darstellen. Ist

$$r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \dots r_{\alpha_\nu} = \sum_\tau A^{(0)}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\nu),$$

so ergibt sich für die Matrizen s aus $\mathfrak{D}$

$$p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_\nu} = \sum_\tau \Gamma(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\nu).$$

Daher folgt aus

$$\Gamma(k_1, k_2, \dots, k_\nu) = \sum_\alpha \pm p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_\nu}:$$

$$A^{(0)}(k_1, k_2, \dots, k_\nu) = \sum_\alpha \pm r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \dots r_{\alpha_\nu}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Im Fall $n = 2$ sei $A^{(0)}(0)$ die Hauptcharakteristik. Aus den Hilfssätzen 3 und 6 schließt man, daß r_α ebenso oft $A^{(0)}(0)$ enthält, wie $\Gamma(0) = 1$ in p_α enthalten ist. Dann kann r_α $A^{(1)}(0)$ nicht mehr enthalten, es wird gleichzeitig

$$r_\alpha = d_0 A^{(0)}(0) + \sum_{\mu > 0} u_\mu A^{(0)}(\mu),$$

$$p_\alpha = d_0 \Gamma(0) + \sum_{\mu > 0} u_\mu \Gamma(\mu).$$

Man schließt dann wie im Fall $n > 2$ weiter; der Hilfssatz 9 gilt auch für $n = 2$.

Es sei $n = 2\nu$ gerade. Es möge hier $\Gamma''(k_1, k_2, \dots, k_\nu)$ und p''_α für den Grad $n+1$ die Bedeutung wie sonst $\Gamma(k_1, k_2, \dots, k_\nu)$ und p_α haben. Es ist also p''_α die α-te Wronskische Funktion von $1, e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_\nu}, e^{-i\varphi_\nu}$.

Hilfssatz 10: *Ist* $k_1 \geqq k_2 \geqq \dots \geqq k_\nu \geqq 0$, *so folgt aus*

$$\Gamma(k_1, k_2, \dots, k_\nu) = \sum_\alpha \pm p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_\nu}: \tag{54}$$

$$\Gamma''(k_1, k_2, \dots, k_\nu) = \sum_\alpha \pm p''_{\alpha_1} p''_{\alpha_2} \cdots p''_{\alpha_\nu}.$$

Beweis: Aus (54) folgt nach Hilfssatz 9

$$A^{(0)}(k_1, k_2, \dots, k_\nu) = \sum_\alpha \pm r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \dots r_{\alpha_\nu}. \tag{55}$$

Genau nach demselben Verfahren wie beim Beweis von Hilfssatz 8, wo man aus der Darstellung von $\Gamma'(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1})$ die von $\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, 0)$ gewann, erhält man hier aus der Darstellung für $A^{(0)}(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$, die nach Hilfssatz 9 genau der von $\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ entspricht, die von $\Gamma''(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$. An Stelle von Hilfssatz 3 hat man den analogen Satz, Hilfssatz 6, zu benutzen; man wird auf Produkte von $2\nu = n$ Faktoren r_ϱ bezw. p''_ϱ geführt, und für diese gilt noch der Hilfssatz 6. In einzelnen Punkten wird hier der Beweis sogar etwas einfacher als oben.

§ 6. Darstellung der Charakteristiken von $\mathfrak{D}$ mit Hilfe der Wronskischen Funktionen.

Es habe p_a die Bedeutung wie in § 5; für $a < 0$ werde $p_a = 0$ gesetzt. Ist μ eine ganze positive Zahl, sind ferner $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ ganze Zahlen, so werde

$$(56)\quad \varDelta(a_1, a_2, \ldots, a_\mu) = \begin{vmatrix} p_{a_1} - p_{a_1-2}, & p_{a_1+1} - p_{a_1-3}, & \ldots, & p_{a_1+\mu-1} - p_{a_1-\mu-1} \\ p_{a_2-1} - p_{a_2-3}, & p_{a_2} - p_{a_2-4}, & \ldots, & p_{a_2+\mu-2} - p_{a_2-\mu-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{a_\mu-\mu+1} - p_{a_\mu-\mu-1}, & p_{a_\mu-\mu+2} - p_{a_\mu-\mu-2}, & \ldots, & p_{a_\mu} - p_{a_\mu-2\mu} \end{vmatrix},$$

$$\varDelta(a_1, a_2, \ldots, a_\mu) = \left| p_{a_\varkappa-\varkappa+\lambda} - p_{a_\varkappa-\varkappa-\lambda} \right|_{(\mu)}$$

gesetzt. Besonders interessiert der Fall $\mu = \nu$,

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_\nu \geqq 0.$$

Ist $1 \leqq \varrho < \nu$ und sind $a_{\varrho+1} = a_{\varrho+2} = \cdots = a_\nu = 0$, so wird:

$$\varDelta(a_1, a_2, \ldots, a_\varrho, 0, 0, \ldots, 0) = \varDelta(a_1, a_2, \ldots, a_\varrho).$$

Ist $a_\nu = -1$, so wird $\varDelta(a_1, a_2, \ldots, a_\nu) = 0$, da in der letzten Zeile dann nur Nullen stehen. Ist für ein ϱ $a_\varrho = a_{\varrho+1} - 1$, so wird auch $\varDelta(a_1, a_2, \ldots, a_\nu) = 0$, da zwei Zeilen gleich sind. Das Schursche Hauptresultat lautet nun:

III. *Es gilt für* $n \geqq 2$, $k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_\nu \geqq 0$ *die Darstellung*

$$(57)\quad \Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \left| p_{k_\varkappa-\varkappa+\lambda} - p_{k_\varkappa-\varkappa-\lambda} \right|_{(\nu)} {}^{1)}.$$

Beweis: Die Behauptung ist richtig für $n = 2$. Hier ist $\mathfrak{D}$ eine Abelsche Gruppe, daher sind alle einfachen Charakteristiken linear, sie stimmen also mit ihren Anfangsgliedern überein. Es ist: $\Gamma(0) = 1$ und für $k > 0$ $\Gamma(k) = \gamma(k) + \gamma(-k) = e^{ik\varphi_1} + e^{-ik\varphi_1}$.

1) Dabei ist p_a mit $a < 0$ gleich 0 zu setzen!

Andererseits wird:

$$p_k - p_{k-2} = \varDelta(k) = e^{ik\varphi_1} + e^{-ik\varphi_1}, \quad p_0 - p_{-2} = \varDelta(0) = 1,$$

wie man unmittelbar sieht. Daher ist für $n = 2$ (57) richtig. Wir nehmen an, (57) sei schon für die Drehungsgruppe $\mathfrak{D}_{n-1}$ in $n-1$ Variabeln bewiesen. Dann soll (57) für die Drehungsgruppe $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{D}$ in n Variabeln gezeigt werden. Es sei n zunächst ungerade. Es mögen p'_a, $\varGamma'(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$, $\varDelta'(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ die entsprechende Bedeutung für $n-1$ haben wie p_a, $\varGamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$, $\varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ für $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_n$. Die Darstellung von $\varGamma'(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ durch die Determinante $\varDelta'(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ liefert eine Darstellung von $\varGamma'(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ als lineare Verbindung von Produkten von ν Wronskischen Funktionen p'_a, der Art wie bei Hilfssatz 7. Nach dem Hilfssatz 10 überträgt sich dann diese Darstellung sofort auf $\varGamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$. Der Fall eines ungeraden n ist damit erledigt. Ist $n = 2\nu$, $k_\nu = 0$, so schließt man mit Hilfe von Hilfssatz 8 analog wie bei ungeradem n.

Wir haben allein für $n = 2\nu$, $k_\nu \neq 0$ die Behauptung zu zeigen. Es gilt der

Hilfssatz 11: *Für $l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots \geqq l_\nu \geqq 0$ ist*

$$\varDelta(l_1, l_2, \ldots, l_\nu) \cdot p_1 = \sum_\lambda \varDelta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu); \tag{58}$$

dabei durchläuft für $l_\nu \neq 1$ λ alle Systeme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$, die aus $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$ durch Veränderung einer Zahl um 1 entstehen. Für $l_\nu = 1$ hat man das System $l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}, 0$ noch einmal hinzuzufügen.

Das soll in § 7 bewiesen werden [1]).

Angenommen die Formel (57) sei nicht allgemein richtig. Dann suche man unter den Systemen $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$, für die sie falsch ist, eins mit möglichst kleinem k_ν aus, und zwar nehme man dasjenige, für das bei lexikographischer Anordnung $k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}$ möglichst niedrig ist. Dann ist $k_\nu > 0$, da für $k_\nu = 0$ (57) bewiesen ist. Ferner ist

$$\varGamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu) = \varDelta(l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$$

für alle Systeme l, für die $l_\nu < k_\nu$ ist oder $l_\nu = k_\nu$ und $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$ niedriger ist als $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$. Um die Behauptung zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß dann auch für das wohlbestimmte System $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ doch

$$\varGamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$$

1) Um den Beweis nicht auseinanderzuziehen, soll der Beweis aller verwendeten elementaren Identitäten auf § 7 verschoben werden.

ist. Man bilde

(59) $$P = \varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1) \cdot p_1 = \sum_{\varkappa} \varDelta(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu),$$

wo jetzt $\varkappa$ alle Systeme durchläuft, die aus $k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1$ durch Abänderung einer Zahl um 1 entstehen, für $k_\nu - 1 = 1$ ist $\varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, 0)$ zweimal zu nehmen. Da nach Voraussetzung die Gleichung $\varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1) = \Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1)$ richtig ist, ist P eine Charakteristik von $\mathfrak{D}$. Gelten für ein System $\varkappa$ nicht die Beziehungen $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 \geqq \cdots \geqq \varkappa_\nu$, so muß $\varkappa_{\varrho-1} = \varkappa_\varrho - 1$ für ein bestimmtes ϱ sein; dann ist $\varDelta(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) = 0$. Das Gleiche gilt, wenn (für $k_\nu = 1$) $\varkappa_\nu = -1$ wird. Alle diese Systeme $\varkappa$ lasse man einfach weg. Dann besteht nach Voraussetzung für alle Systeme $\varkappa$ die Gleichung

$$\varDelta(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) = \Gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$$

mit Ausnahme allein des Systems $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$, da sonst stets $\varkappa_\nu < k_\nu$ ist. Es entstehe zunächst $\varkappa$ aus $k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1$ durch Erniedrigung einer Zahl um 1. Nach Hilfssatz 11 gilt dann

(60) $$\varDelta(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) \cdot p_1 = \sum_{\lambda} \varDelta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu),$$

wo λ alle Zahlen durchläuft, die aus $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu$ durch Veränderung einer Zahl um 1 entstehen. Da $\varkappa_\nu < k_\nu$ ist, ist $\lambda_\nu \leqq k_\nu$, und nur dann kann $\lambda_\nu = k_\nu$ sein, wenn λ aus $\varkappa$ durch Erhöhung der letzten Zahl um 1 entsteht; in diesem Fall muß λ niedriger als $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ sein. Daher ist nach Voraussetzung für alle λ die Gleichung richtig:

$$\varDelta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu) = \Gamma(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu);$$

man darf also in (60) links und rechts $\varDelta$ durch Γ ersetzen. Unter den Systemen λ kommt $k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1$ vor, also folgt aus (60), daß $\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{1-\nu}, k_\nu - 1)$ in der Charakteristik $\Gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) \cdot p_1$ als Bestandteil enthalten ist. Dann ist $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1)$ entweder in $\gamma(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\nu-1}, \varkappa_\nu) \cdot p_1$ oder in $\gamma(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\nu-1}, -\varkappa_\nu) \cdot p_1$ enthalten; das andere der beiden Produkte muß $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu + 1)$ enthalten, wie man erkennt, wenn man φ_ν durch $-\varphi_\nu$ ersetzt. Aus Hilfssatz 2* folgt, daß dann eins der Produkte $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1) \cdot p_1$ oder $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu + 1) \cdot p_1$ als Bestandteil $\gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$ enthält; das andere enthält $\gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\nu-1}, -\varkappa_\nu)$. Daher ist

$$\Gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) \text{ in } \Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1) \cdot p_1$$

enthalten und zwar im Falle $k_\nu = 2$, $\varkappa_\nu = 0$ sogar zweimal. Subtrahiert man in (59) links und rechts alle diese $\Gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$, für die $\varkappa$ aus $k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1$ durch Erniedrigung einer Zahl um 1 entsteht, und für die $\varDelta(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) \neq 0$ ist, so ist der links entstehende Ausdruck P' noch eine Charakteristik von $\mathfrak{D}$, und es gilt

$$(61) \qquad P' = \sum_\mu \varDelta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu),$$

wo μ alle die Systeme durchläuft, die aus $k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1$ durch Erhöhung einer Zahl um 1 entstehen, und für die außerdem $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \cdots \geqq \mu_\nu$ ist.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß P' alle Charakteristiken

$$(62) \qquad \Gamma(k_1, \ldots, k_{\varrho-1}, k_\varrho + 1, k_{\varrho+1}, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1) \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$$

als Bestandteile enthält. Wie oben erwähnt, wissen wir schon, daß man bei allen diesen Ausdrücken das Zeichen Γ durch $\varDelta$ ersetzen darf. Wenn die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen ist, folgt aus (61), daß $\varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ wirklich eine Charakteristik von $\mathfrak{D}$ ist. Es sei etwa schon für $\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma - 1$ gezeigt, daß die Charakteristik (62) in P' als Bestandteil auftritt. Denken wir uns alle diese Charakteristiken nun in (61) fortgehoben. Dann gilt

Hilfssatz 12: *Für* $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_\nu \geqq 0$ *hat*

$$\varDelta(a_1, a_2, \ldots, a_\nu) = \sum_\alpha e^{i(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_\nu\varphi_\nu)}$$

das Anfangsglied $e^{i(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_\nu\varphi_\nu)}$. Beweis in § 7.

Daraus ergibt sich, daß die aus P' beim Fortheben entstandene Charakteristik das Anfangsglied $e^{iK\varphi}$,

$$K = k_1\varphi_1 + \cdots + k_{\sigma-1}\varphi_{\sigma-1} + (k_\sigma + 1)\varphi_\sigma + k_{\sigma+1}\varphi_{\sigma+1} + \cdots + k_{\nu-1}\varphi_{\nu-1} + (k_\nu - 1)\varphi_\nu$$

hat; daher muß P' auch die Charakteristik (62) für $\varrho = \sigma$ enthalten. Dieselbe Betrachtung ist auch im Fall $\sigma = 1$ richtig, hier ist aber kein vorheriges Fortheben von Charakteristiken notwendig. Dann ist gezeigt, daß $\varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ wirklich eine Charakteristik von $\mathfrak{D}$ ist, als Anfangsglied ergibt sich nach Hilfssatz 12 $e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)}$. Da ferner die Determinante $\varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ ungeändert bleibt, wenn man φ_ν durch $-\varphi_\nu$ ersetzt, muß sie als Bestandteil $\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ enthalten. Um nachzuweisen, daß sie mit dieser Charakteristik übereinstimmt, hat man nur zu zeigen, daß keine weiteren Bestandteile in $\varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ vorkommen können. Wir setzen $\varphi_\nu = 0$. Jede Charakteristik von $\mathfrak{D}$ geht dann in eine Charakteristik von $\mathfrak{D}_{n-1}$ über. Das folgt sofort, wenn man die Untergruppe von $\mathfrak{D}$ betrachtet, die durch alle Matrizen $\begin{pmatrix} D_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $D_{n-1} < \mathfrak{D}_{n-1}$ gebildet wird. Diese Untergruppe ist zu $\mathfrak{D}_{n-1}$ isomorph; jeder Homomorphismus von $\mathfrak{D}$ liefert also einen Homomorphismus von $\mathfrak{D}_{n-1}$; die Charakteristik erhält man, wenn man in der Charakteristik von $\mathfrak{D}$ die Veränderliche $\varphi_\nu = 0$ setzt. Für $\varphi_\nu = 0$ wird:

(63) $$p_a = p'_a + p'_{a-1} + \cdots + p'_0 + p'_{-1} + p'_{-2} + \cdots$$

Es sei

(64) $$\Delta'(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) = \left| p'_{\varkappa_\varrho - \varrho + \sigma} - p'_{\varkappa_\varrho - \varrho - \sigma} \right|_{(\nu)}.$$

Man setze $k_{\nu+1} = 0$ und bilde

$$\sum = \sum_{\varkappa_1 = k_2}^{k_1} \sum_{\varkappa_2 = k_3}^{k_2} \cdots \sum_{\varkappa_\nu = k_{\nu+1}}^{k_\nu} \Delta'(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$$

$$= \sum_{\varkappa_1} \sum_{\varkappa_2} \cdots \sum_{\varkappa_\nu} \left| p'_{\varkappa_\varrho - \varrho + \sigma} - p'_{\varkappa_\varrho - \varrho - \sigma} \right|_{(\nu)} = \left| \sum_{\varkappa_\varrho = k_{\varrho+1}}^{k_\varrho} (p'_{\varkappa_\varrho - \varrho + \sigma} - p'_{\varkappa_\varrho - \varrho - \sigma}) \right|_{(\nu)}.$$

Man addiere in der Determinante $\sum$ die $(\varrho+1)$-te, $(\varrho+2)$-te, ..., ν-te Zeile zur ϱ-ten Zeile. Dann steht in der ϱ-ten Zeile, σ-ten Spalte:

$$\sum_{\varkappa = k_{\nu+1} - \nu + \sigma}^{k_\nu - \nu + \sigma} (p'_\varkappa - p'_{\varkappa - 2\sigma}) + \sum_{\varkappa = k_\nu - \nu + 1 + \sigma}^{k_{\nu-1} - \nu + 1 + \sigma} (p'_\varkappa - p'_{\varkappa - 2\sigma}) + \cdots + \sum_{\varkappa = k_{\varrho+1} - \varrho + \sigma}^{k_\varrho - \varrho + \sigma} (p'_\varkappa - p'_{\varkappa - 2\sigma})$$
$$= \sum_{k_{\nu+1} - \nu + \sigma}^{k_\varrho - \varrho + \sigma} p'_\varkappa - \sum_{k_{\nu+1} - \nu - \sigma}^{k_\varrho - \varrho - \sigma} p'_\varkappa.$$

Da $k_{\nu+1} - \nu \pm \sigma = -\nu \pm \sigma \leqq 0$ ist, ist dies $p_{k_\varrho - \varrho + \sigma} - p_{k_\varrho - \varrho - \sigma}$ für $\varphi_\nu = 0$. Führt man die Addition der Reihe nach für $\varrho = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ durch, so folgt: Für $\varphi_\nu = 0$ wird

(65) $$\sum_{\varkappa_1 = k_2}^{k_1} \cdots \sum_{\varkappa_\nu = k_{\nu+1}}^{k_\nu} \Delta'(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) = \left| p_{k_\varrho - \varrho + \sigma} - p_{k_\varrho - \varrho - \sigma} \right|_{(\nu)}$$
$$= \Delta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu).$$

Nun gilt

Hilfssatz 13: *Ist* $n - 1 = 2\nu - 1$, $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 \geqq \cdots \geqq \varkappa_\nu \geqq 0$, so ist

$$\Delta'(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) = 0 \qquad \text{für } \varkappa_\nu \neq 0{,}1;$$
$$\Delta'(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) = \Delta'(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\nu-1}) \quad \text{für } \varkappa_\nu = 0{,}1.$$

(Beweis in § 7). Unter Verwendung dieser Regel folgt aus (65) für $\varphi_\nu = 0$

$$\varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = 2 \sum_{\varkappa_1 = k_2}^{k_1} \cdots \sum_{\varkappa_{\nu-1} = k_\nu}^{k_{\nu-1}} \varDelta'(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, k_{\nu-1}) \quad \text{für } k_\nu > 0;$$

$$\varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \sum_{\varkappa_1 = k_2}^{k_1} \cdots \sum_{\varkappa_{\nu-1} = k_\nu}^{k_{\nu-1}} \varDelta'(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\nu-1}) \quad \text{für } k_\nu = 0.$$

Also gilt:

$$(66) \quad \varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \eta_k \cdot \sum_{\varkappa_1 = k_2}^{k_1} \sum_{\varkappa_1 = k_2}^{k_2} \cdots \sum_{\varkappa_{\nu-1} = k_\nu}^{k_{\nu-1}} \Gamma'(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$$

für $\varphi_\nu = 0$, wo $\eta_k = 1$ oder 2 ist, je nachdem ob $k_\nu = 0$ oder $k_\nu > 0$ ist. Für unser oben betrachtetes System $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ war $k_\nu \geqq 1$, also ist in (66) $\eta_k = 2$ zu nehmen.

Die Charakteristik $\varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ von $\mathfrak{D}$ enthalte nun außer $\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ noch eine Charakteristik $\gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$. Da sie ungeändert bleibt, wenn man φ_ν durch $-\varphi_\nu$ ersetzt, kann man annehmen $l_\nu \geqq 0$; $\varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ muß dann auch $\Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$ enthalten. Setzt man $\varphi_\nu = 0$, so wird $e^{i(l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \cdots + l_{\nu-1}\varphi_{\nu-1})}$ das Anfangsglied von $\gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$, daher enthält $\gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$, wenn man $\varphi_\nu = 0$ setzt und den Ausdruck als Charakteristik von $\mathfrak{D}_{n-1}$ betrachtet, $\Gamma'(l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1})$. Es muß also dieser Ausdruck in der Darstellung (66) von $\varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ vorkommen. Daraus folgt:

$$(67) \qquad k_1 \geqq l_1 \geqq k_2 \geqq l_2 \geqq \cdots \geqq k_{\nu-1} \geqq l_{\nu-1} \geqq k_\nu.$$

Da ferner $\Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$ in $\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1) \,.\, p_1$ enthalten ist, so schließt man wie oben aus Hilfssatz 2, daß $\Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu) \,.\, p_1$ als Bestandteil $\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1)$ enthalten muß. Nun ist für alle Glieder $e^{i(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu\varphi_\nu)}$ von $\Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$ nach Hilfssatz 1 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\nu \leqq l_1 + l_2 + \cdots l_\nu$. Für alle Glieder von p_1 ist die entsprechende Summe ± 1, für alle Glieder von

$\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1)$ nicht größer als $k_1 + k_2 + \cdots + k_{\nu-1} + k_\nu - 1$.

Da in $\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1) \,.\, p_1$ das Anfangsglied

$$e^{i(l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \cdots + l_\nu\varphi_\nu)}$$

von $\Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$ vorkommen muß, folgt

$$(68) \qquad \begin{aligned} K &= k_1 + k_2 + \cdots + k_{\nu-1} + (k_\nu - 1) + 1 \\ &= k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu \geqq l_1 + l_2 + \cdots + l_\nu = L. \end{aligned}$$

Umgekehrt ergibt sich, da $\Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu) \,.\, p_1$

$$e^{i(k_1\varphi_1 + \cdots + k_{\nu-1}\varphi_{\nu-1} + (k_\nu - 1)\varphi_\nu)}$$

enthalten muß:

$$L + 1 \geqq k_1 + k_2 + \cdots + k_{\nu-1} + (k_\nu - 1) = K - 1.$$

Aus Hilfssatz 1 folgt ferner $K \equiv L \pmod{2}$, so daß also eine der beiden Beziehungen besteht

$$L = K \quad \text{oder} \quad L = K - 2. \tag{69}$$

Es entstehe nun etwa das Glied

$$e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_{\nu-1}\varphi_{\nu-1} + (k_\nu - 1)\varphi_\nu)}$$

in $\Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu) \cdot p_1$ durch Multiplikation von

$$e^{i(\mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \cdots + \mu_\nu\varphi_\nu)}$$

in $\Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$ und $e^{i\varepsilon_\varrho\varphi_\varrho}$ in p_1, $(\varepsilon_\varrho = \pm 1)$. Dann ist

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\nu + \varepsilon_\varrho = k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu - 1,$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\nu = K \quad \text{oder} \quad \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\nu = K - 2.$$

Aus $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\nu \leqq L$ folgt daher

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\nu = L - 2 \quad \text{oder} \quad \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\nu = L.$$

Aus Hilfssatz 1 ergibt sich im 1. bezw. im 2. Falle

$$\mu_\nu \geqq l_\nu - 1 \quad \text{bezw.} \quad \mu_\nu \geqq l_\nu.$$

Im 1. Fall ist $L = K$, $\varepsilon_\varrho = 1$; es gilt folglich $k_\nu - 1 \geqq \mu_\nu$

$$k_\nu \geqq l_\nu. \tag{70}$$

Im 2. Fall ist $k_\nu - 1 \geqq \mu_\nu - 1$; (70) ist also auch hier richtig. Da $\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ nicht zweimal $\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ enthalten kann, kann nicht $k_1 = l_1$, $k_2 = l_2$, …, $k_\nu = l_\nu$ sein. Aus (67) und (70) folgt die Richtigkeit von

$$\Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu) = \Delta(l_1, l_2, \ldots, l_\nu),$$

da $l_\nu \leqq k_\nu$ und l niedriger als k ist. Nach (66) hat man dann für $\varphi_\nu = 0$

$$\Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu) = \eta_l \sum_{\lambda_1 = l_2}^{l_1} \sum_{\lambda_2 = l_3}^{l_2} \cdots \sum_{\lambda_{\nu-1} = l_\nu}^{l_{\nu-1}} \Gamma'(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu-1});$$

$$\eta_\lambda = 1 \text{ oder } 2.$$

Alle Glieder dieser Summe müssen in der Summe

$$2 \sum_{\varkappa_1 = k_2}^{k_1} \sum_{\varkappa_2 = k_3}^{k_2} \cdots \sum_{\varkappa_{\nu-1} = k_\nu}^{k_{\nu-1}} \Gamma'(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\nu-1}) = \Delta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu), \quad (\varphi_\nu = 0)$$

vorkommen, also folgt in Verbindung mit (70)

$$l_2 = k_2,\ l_3 = k_3,\ \ldots,\ l_\nu = k_\nu.$$

Dann kann nicht auch $l_1 = k_1$ sein, nach (69) bleibt nur der Fall $l_1 = k_1 - 2$ übrig. Jetzt wird man aber auf einen Widerspruch geführt, denn

$$(71) \qquad \Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu) \cdot p_1 = \Gamma(k_1 - 2, k_2, \ldots, k_\nu) \cdot p_1$$

kann nicht $\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1)$ enthalten, weil ja das Anfangsglied $e^{i((k_1-1)\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)}$ von (71) zu niedrig ist. Nach dem früheren mußte aber (71) die Charakteristik

$$\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1)$$

als Bestandteil enthalten. Daher enthält $\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ außer $\Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ keine weiteren Bestandteile, also gilt

$$\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \Gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu),$$

und III ist allgemein bewiesen.

§ 7. **Hilfssätze über Determinanten.**

Es sei im folgenden wieder für $a \geqq 0$ p_a die a-te Wronskische Funktion von

$$1,\ e^{i\varphi_1},\ e^{-i\varphi_1},\ \ldots,\ e^{i\varphi_\nu},\ e^{-i\varphi_\nu} \qquad (n = 2\nu + 1);$$

$$\text{bezw. } e^{i\varphi_1},\ e^{-i\varphi_1},\ \ldots,\ e^{i\varphi_\nu},\ e^{-i\varphi_\nu} \qquad (n = 2\nu).$$

C_λ bedeute die λ-te elementarsymmetrische Funktion derselben Variabeln. Dann gelten für $a \geqq n$ die Formeln

$$(72) \qquad C_\lambda = C_{n-\lambda}$$

$$(73) \qquad p_a - C_1 p_{a-1} + C_2 p_{a-2} - \cdots \pm C_n p_{a-n} = 0\ ^{1)}.$$

Es werde jetzt *(im Gegensatz zu früher)* p_a für $a < 0$ so definiert, daß (73) allgemein gilt. Man findet dann:

$$(74) \qquad p_{-a-n} = (-1)^{n+1} p_a$$

$$(75) \qquad p_{-1} = p_{-2} = \cdots = p_{-n+1} = 0, \quad p_{-n} = (-1)^{n+1}.$$

Bezeichnet man mit $C_\lambda^{(\tau)}$ die λ-te elementarsymmetrische Funktion von $e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_\tau}, e^{-i\varphi_\tau}$ und ist $t = 2\tau$, $1 \leqq \tau \leqq \nu$, so

1) Vgl. Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. 1, S. 465.

wird, wie leicht zu sehen ist,

(76) $$p_a - C_1^{(\tau)} p_{a-1} + C_2^{(\tau)} p_{a-2} - \cdots + C_t^{(\tau)} p_{a-t} = p_a^{(\tau)},$$

wo $p_a^{(\tau)}$ die a-te Wronskische Funktion von

$$1,\ e^{i\varphi_{\tau+1}},\ e^{-i\varphi_{\tau+1}},\ \ldots,\ e^{i\varphi_\nu},\ e^{-i\varphi_\nu} \quad \text{für } n = 2\nu+1,$$

$$e^{i\varphi_{\tau+1}},\ e^{-i\varphi_{\tau+1}},\ \ldots,\ e^{i\varphi_\nu},\ e^{-i\varphi_\nu} \quad \text{für } n = 2\nu$$

bedeutet. Man setze für alle a

(77) $$q_a = p_a - p_{a-2}, \quad q_a^{(\tau)} = p_a^{(\tau)} - p_{a-2}^{(\tau)}.$$

Dann folgt aus (76)

$$q_a - C_1^{(\tau)} q_{a-1} + C_2^{(\tau)} q_{a-2} - \cdots + C_t^{(\tau)} q_{a-t} = q_a^{(\tau)}.$$

Da $C_\lambda^{(\tau)} = C_{t-\lambda}^{(\tau)}$ ist, kann man das auch schreiben:

(78) $$\left\{\begin{aligned} &C_0^{(\tau)}(q_a + q_{a-t}) - C_1^{(\tau)}(q_{a-1} + q_{a-t+1}) + \cdots + (-1)^{(\tau-1)} C_{\tau-1}^{(\tau)}(q_{a-\tau+1} + q_{a-\tau-1}) \\ &\qquad + (-1)^{(\tau)} C_\tau^{(\tau)} q_{a-\tau} = q_a^{(\tau)}. \end{aligned}\right.$$

Dabei ist unter $q_a^{(\nu)}$ in jedem Fall 0 zu verstehen. Man bilde jetzt die Determinanten

(79) $$D(k_1, k_2, \ldots, k_\mu) = \left| p_{k_\varrho-\varrho+\sigma} - p_{k_\varrho-\varrho-\sigma} \right|_{(\mu)}.$$

Diese Determinanten unterscheiden sich von den früher betrachteten Determinanten $\varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\mu)$ nur dadurch, daß in ihnen für $a < 0$ p_a anders definiert ist. Es ist nun:

$$p_{k_\varrho-\varrho+\sigma} - p_{k_\varrho-\varrho-\sigma} = q_{k_\varrho-\varrho+\sigma} + q_{k_\varrho-\varrho+\sigma-2} + \cdots + q_{k_\varrho-\varrho-\sigma+2}.$$

Eine einfache Determinantenumformung ergibt dann

(80) $$D(k_1, k_2, \ldots, k_\mu) = \left| q_{k_\varrho-\varrho+1},\ q_{k_\varrho-\varrho+2} + q_{k_\varrho-\varrho},\ \ldots,\ q_{k_\varrho-\varrho+\mu} + q_{k_\varrho-\varrho-\mu+2} \right|_{(\mu)}.$$

Es sei $1 \leqq \mu \leqq \nu$, $k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_\mu > 0$. Multipliziert man in dieser Determinante die erste Spalte mit $(-1)^\tau C_\tau^{(\tau)}$, die zweite mit $(-1)^{\tau-1} C_{\tau-1}^{(\tau)}, \ldots,$ die τ-te mit $-C_1^{(\tau)}$ und addiert sie zur $(\tau+1)$-ten Spalte, und führt man das hintereinander für $\tau = \nu-1, \nu-2, \ldots, 2, 1$ durch, so findet man wegen (78)

$$D(k_1, k_2, \ldots, k_\mu) = \left| q_{k_\varrho-\varrho+1},\ q^{(1)}_{k_\varrho-\varrho+2},\ \ldots,\ q^{(\mu-2)}_{k_\varrho-\varrho+\mu-1},\ q^{(\mu-1)}_{k_\varrho-\varrho+\mu} \right|_{(\mu)}.$$

Dann kommen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\tau$ in der $(\tau+1)$-ten Spalte nicht mehr vor. Jetzt ist unmittelbar zu sehen, daß $D(k_1, k_2, \ldots, k_\mu)$ das Anfangsglied $e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\mu\varphi_\mu)}$ hat. Durch eine analoge Umformung erkennt man, daß für irgend $\nu+1$ ganze Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_{\nu+1}$ die Gleichung gilt:

(81) $$D(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu+1}) = 0.$$

Zunächst sei $n = 2\nu + 1$; $k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_\nu \geqq 0$. In $D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ kommen nur Wronskische Funktionen p_a mit $a \geqq -2\nu = -n+1$ vor. Ist $a < 0$, so ist dann nach (75) auch bei der neuen Definition $p_a = 0$. Es wird dann also:

$$D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \Delta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu). \tag{82}$$

Bei geradem n, $1 \leqq \mu \leqq \nu$, kommen diejenigen p_a, bei denen die alte und die neue Definition von einander abweichen, nur für $\mu = \nu$, $k_\nu = 0$ vor. Es handelt sich um $p_{-2\nu} = -p_0$. Man findet für $k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_\mu \geqq 0$, $1 \leqq \mu \leqq \nu$

$$\begin{aligned} D(k_1, k_2, \ldots, k_\mu) &= \Delta(k_1, k_2, \ldots, k_\mu), \quad (\mu < \nu \text{ oder } \mu = \nu,\ k_\nu > 0); \\ D(k_1, k_2, \ldots, k_\mu) &= 2\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_\mu), \quad (\mu = \nu,\ k_\nu = 0). \end{aligned} \tag{83}$$

Aus (82) und (83) folgt dann unmittelbar die Richtigkeit des Hilfssatzes 12 in § 6, da für $k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_\mu > 0$, $1 \leqq \mu \leqq \nu$; $D(k_1, k_2, \ldots, k_\mu)$ das Anfangsglied $e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\mu\varphi_\mu)}$ hat.

Es sei $n = 2\nu + 1$, $k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_{\nu+1} \geqq 0$. In $D(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu+1})$ können p_a mit negativem a und $p_a \neq 0$ nur dann vorkommen, wenn $k_\nu = 0$ oder $k_{\nu+1} = 0$ oder $k_{\nu+1} = 1$ ist. Für $k_{\nu+1} = 1$ lautet die letzte Zeile in der Determinante $D(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu+1})$

$$0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ p_0,\ p_1 - p_0,$$

in $\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu+1})$ aber $0, 0, \ldots, 0, p_0, p_1$. Alle übrigen Zeilen stimmen überein ($k_\nu \geqq k_{\nu+1} = 1$). Daher wird in diesem Fall

$$0 = D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu, 1) = \Delta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu, 1) - p_0 . \Delta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$$

$$\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu, 1) = \Delta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu). \tag{84}$$

Ist $k_{\nu+1} = 0$, so lautet die letzte Zeile von $\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu, 0)$ $0, 0, \ldots, 0, p_0$, und man findet unmittelbar

$$\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu, 0) = \Delta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu). \tag{85}$$

Im Falle $k_\nu \geqq 2$ wird aber

$$\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu+1}) = D(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu+1}) = 0. \tag{86}$$

Die Formeln (84), (85) und (86) ergeben aber den Beweis von Hilfssatz 13.

Es sei $\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$; eine Folge von beliebigen Zahlen $i_1, i_2, \ldots, i_m$ seien m ganze Zahlen. Man betrachte die Matrix mit m Zeilen und $(m+1)$ Spalten

$$(87)\qquad M = \begin{vmatrix} a_{i_1}, & a_{i_1+1}+a_{i_1-1}, & \ldots, & a_{i_1+m}+a_{i_1-m} \\ a_{i_2}, & a_{i_2+1}+a_{i_2-1}, & \ldots, & a_{i_2+m}+a_{i_2-m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_m}, & a_{i_m+1}+a_{i_m-1}, & \ldots, & a_{i_m+m}+a_{i_m-m} \end{vmatrix}.$$

Die Determinante die aus M durch Streichen der μ-ten Spalte entsteht, werde mit $\delta_\mu = \delta_\mu(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ bezeichnet, also

$$\delta_\mu = |a_{i_\varrho}, a_{i_\varrho+1}+a_{i_\varrho-1}, \ldots, a_{i_\varrho+\mu-2}+a_{i_\varrho-\mu+2}, \\ a_{i_\varrho+\mu}+a_{i_\varrho-\mu}, \ldots, a_{i_\varrho+m}+a_{i_\varrho-m}|_{(m)}.$$

Es werde $\delta_{m+1}(i_1, i_2, \ldots, i_m) = d(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ gesetzt, also

$$d(i_1, i_2, \ldots, i_m) = |a_{i_\varrho}, a_{i_\varrho+1}+a_{i_\varrho-1}, \ldots, a_{i_\varrho+m-1}+a_{i_\varrho-m+1}|_{(m)}.$$

Ferner sei C_λ die λ-te elementarsymmetrische Funktion von

$$e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_m}, e^{-i\varphi_m};\quad C_0 = 1$$

$$(88)\qquad C_{m+1-\mu} = \sum_\varkappa e^{i(\varkappa_1\varphi_1+\varkappa_2\varphi_2+\cdots+\varkappa_m\varphi_m)},$$

wo $\varkappa$ eine gewisse Menge von Gitterpunkten im m-dimensionalen Raum durchläuft; es ist $\varkappa_\varrho = 0, 1$ oder -1.

Hilfssatz 14: *Bei diesen Bezeichnungen gilt die Identität*

$$(89)\qquad \delta_\mu = \sum_\varkappa d(i_1+\varkappa_1, i_2+\varkappa_2, \ldots, i_m+\varkappa_m), \qquad (1 \leqq \mu \leqq m+1),$$

wo $\varkappa$ dieselben Gitterpunkte wie in (88) *durchläuft* [1]).

Beweis: Die Behauptung ist trivial im Fall

$$\mu = m+1;\quad C_{m+1-\mu} = C_0 = 1,\ \delta_{m+1} = d(i_1, i_2, \ldots, i_m).$$

Für $m = 1$ ist (89) richtig. Es interessiert hier nur der Fall $\mu = 1$, und da wird

$$C_{m+1-\mu} = C_1 = e^{i\varphi_1}+e^{-i\varphi_1};\quad \delta_1 = a_{i_1+1}+a_{i_1-1} = d(i_1+1)+d(i_1-1).$$

Es sei (89) schon für die Fälle $1, 2, \ldots, m-1$ bewiesen. Dann folgt die Behauptung für die Determinanten m-ten Grades so: Man entwickle alle Determinanten $d(i_1+\varkappa_1, i_2+\varkappa_2, \ldots, i_m+\varkappa_m)$ nach der letzten Spalte. Man findet dann für die rechte Seite R von (89) einen Ausdruck

1) Natürlich ist es unwesentlich, daß in M die Elemente in den verschiedenen Zeilen aus den Elementen einer Zahlenfolge gebildet sind.

$$(90)\quad \begin{cases} R = \sum\limits_{\varrho=1}^{m} (a_{i_\varrho+m} + a_{i_\varrho-m+2})\, U_\varrho + \sum\limits_{\varrho=1}^{m} (a_{i_\varrho+m-1} + a_{i_\varrho-m+1})\, V_\varrho \\ \quad + \sum\limits_{\varrho=1}^{m} (a_{i_\varrho+m-2} + a_{i_\varrho-m})\, W_\varrho = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \end{cases}$$

Dabei bedeuten U_ϱ, V_ϱ, W_ϱ Summen aus gewissen Unterdeterminanten, die noch mit einem bestimmten Vorzeichen zu nehmen sind. Wir wollen zunächst etwa den Koeffizienten von $a_{i_1+m} + a_{i_1-m+2}$ untersuchen. Soll das Glied in der letzten Spalte von

$$d(i_1 + \varkappa_1,\ i_2 + \varkappa_2,\ \ldots,\ i_m + \varkappa_m)$$

vorkommen, so muß $\varkappa_1 = 1$ sein. Es tritt dann das Glied mit $(-1)^{m+1} d(i_2 + \varkappa_2,\ i_3 + \varkappa_3,\ \ldots,\ i_m + \varkappa_m)$ multipliziert auf. Es bedeute C'_λ die λ-te elementarsymmetrische Funktion von

$$e^{i\varphi_2},\ e^{-i\varphi_2},\ e^{i\varphi_3},\ e^{-i\varphi_3},\ \ldots,\ e^{i\varphi_m},\ e^{-i\varphi_m}.$$

Dann stimmen die Glieder von $C_{m+1-\mu}$, für die $\varkappa_1 = 1$ ist, mit den Gliedern von $e^{i\varphi_1} C'_{m-\mu}$ überein. Ist also

$$C'_{m-\mu} = \sum_\tau e^{i(\tau_2\varphi_2 + \tau_3\varphi_3 + \cdots + \tau_m\varphi_m)},$$

wo τ gewisse Gitterpunkte eines $(m-1)$-dimensionalen Raumes durchläuft, so findet man für U_1 den Wert

$$U_1 = (-1)^{m+1} \sum_\tau d(i_2 + \tau_2,\ i_3 + \tau_3,\ \ldots,\ i_m + \tau_m).$$

Da für Determinanten $(m-1)$-ten Grades der Hilfssatz 14 schon bewiesen ist, wird

$$U_1 = (-1)^{m+1} \delta_\mu(i_2, i_3, \ldots, i_m).$$

W_1 hat denselben Wert, wie man analog erkennt. Ferner findet man als Koeffizienten von $a_{i_\varrho+m} + a_{i_\varrho-m+2}$ und $a_{i_\varrho+m-2} + a_{i_\varrho-m}$ nach demselben Prinzip

$$U_\varrho = W_\varrho = (-1)^{m+\varrho} \delta_\mu(i_1, i_2, \ldots, i_{\varrho-1}, i_{\varrho+1}, \ldots, i_m).$$

Daher kann man

$$\Sigma_1 + \Sigma_3 = \sum_{\varrho=1}^{m} (a_{i_\varrho+m} + a_{i_\varrho-m+2} + a_{i_\varrho+m-2} + a_{i_\varrho-m})\, U_\varrho$$

als Determinante m-ten Grades schreiben; es handelt sich um die Determinante, die aus der Matrix:

$$(a_{i_\varrho},\ a_{i_\varrho+1} + a_{i_\varrho-1},\ \ldots,\ a_{i_\varrho+m-1} + a_{i_\varrho-m+1},\ (a_{i_\varrho+m} + a_{i_\varrho-m}) + (a_{i_\varrho+m-2} + a_{i_\varrho-m+2}));$$
$$(\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

durch Streichen der μ-ten Spalte entsteht. Zerlegt man die Ausdrücke in der letzten Spalte in 2 Summanden

$$\left(a_{i_{\varrho+m}} + a_{i_{\varrho-m}}\right) \text{ und } \left(a_{i_{\varrho+m-2}} + a_{i_{\varrho-m+2}}\right),$$

so kann man entsprechend die Determinante als Summe von zwei Determinanten darstellen. Die erste der beiden Determinanten wird dann gerade $\delta_\mu(i_1, i_2, \ldots, i_m)$; in der 2. Determinante sind für $\mu \neq m-1$ zwei Zeilen gleich. Im Fall $\mu = m-1$ vertausche man in der 2. Determinante die letzte und die vorletzte Spalte; für $m > 2$ ist sie $-d(i_1, i_2, \ldots, i_m)$; für $m = 2$ dagegen

$$-2d(i_1, i_2, \ldots, i_m).$$

Also folgt

$$(91)\quad \begin{cases} \sum_1 + \sum_3 = \delta_\mu(i_1, i_2, \ldots, i_m), & (\mu \neq m-1); \\ \sum_1 + \sum_3 = \delta_\mu(i_1, i_2, \ldots, i_m) - d(i_1, i_2, \ldots, i_m), & (\mu = m-1,\ m > 2); \\ \sum_1 + \sum_3 = \delta_\mu(i_1, i_2, \ldots, i_m) - 2d(i_1, i_2, \ldots, i_m), & (\mu = 1,\ m = 2). \end{cases}$$

Um $\sum_2$ zu berechnen, untersuchen wir zunächst den Ausdruck V_1 in (90). Soll $a_{i_1+m-1} + a_{i_1-m+1}$ in der letzten Spalte von

$$d(i_1 + \varkappa_1,\ i_2 + \varkappa_2,\ \ldots,\ i_m + \varkappa_m)$$

vorkommen, so muß $\varkappa_1 = 0$ sein, als Faktor tritt dann

$$(-1)^{m+1}\, d(i_2 + \varkappa_2,\ i_3 + \varkappa_3,\ \ldots,\ i_m + \varkappa_m)$$

auf. Die Glieder von $C_{m+1-\mu}$, in denen $\varkappa_1 = 0$ ist, stimmen aber gerade mit den Gliedern von $C'_{m+1-\mu} + C'_{m-1-\mu}$ überein. Dabei ist $C'_{-1} = 0$ zu setzen. Es ist $C'_m = C'_{m-2}$. Unter Verwendung von Hilfssatz 14 für den Fall $m-1$ erkennt man dann ähnlich wie oben:

$$V_1 = (-1)^{m+1}\,\delta_{\mu+1}(i_2, i_3, \ldots, i_m) + (-1)^{m+1}\,\delta_{\mu-1}(i_2, i_3, \ldots, i_m).$$

Für $\mu = 1$ ist dabei $\delta_0(i_2, i_3, \ldots, i_m) = \delta_2(i_2, i_3, \ldots, i_m)$ zu setzen; für $\mu = m$ setze man $\delta_{m+1}(i_2, i_3, \ldots, i_m) = 0$

$$V_\varrho = (-1)^{m+\varrho}\,\delta_{\mu+1}(i_1, \ldots, i_{\varrho-1}, i_{\varrho+1}, i_m) + (-1)^{m+\varrho}\,\delta_{\mu-1}(i_1, \ldots, i_{\varrho-1}, i_{\varrho+1}, \ldots, i_m).$$

Man kann dann

$$\sum_2 = \sum_{\varrho=1}^{m} \left(a_{i_\varrho+m-1} + a_{i_\varrho-m+1}\right) V_\varrho$$

als Summe zweier Determinanten m-ten Grades schreiben. Es handelt sich dabei um die Determinanten, die aus

$$\left(a_{i_\varrho},\ a_{i_\varrho+1} + a_{i_\varrho-1},\ \ldots,\ a_{i_\varrho+m-1} + a_{i_\varrho-m+1},\ a_{i_\varrho+m-1} + a_{i_\varrho-m+1}\right),\quad (\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

durch Streichen der $(\mu+1)$-ten bezw. der $(\mu-1)$-ten Spalte entstehen $(\mu \neq 1, m)$. Für $\mu = m$ hat man nur die zweite dieser Determinanten zu nehmen; für $\mu = 1$ ist die Determinante, die durch Streichen der 2. Spalte entsteht, zweimal zu nehmen. In diesen Determinanten stimmen im allgemeinen die vorletzte und die letzte Spalte überein. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn

$$\mu \pm 1 = m \quad \text{oder} \quad \mu \pm 1 = m+1$$

ist. Ist $1 < \mu < m$, so ist das nur für $\mu = m-1$ der Fall. Hier ist also die erste der beiden Determinanten nicht notwendig 0, und zwar wird sie gerade $d(i_1, i_2, \ldots, i_m)$, $m > 2$. Für $\mu = 1$, $m = 2$ wird die Determinante, die durch Streichen der zweiten Spalte entsteht, gerade $d(i_1, i_2)$. Für $\mu = m$ und für $\mu = 1$, $m > 2$ sind die fraglichen Determinanten 0.

$$(92) \qquad \sum\nolimits_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \sum\nolimits_2 = d(i_1, i_2, \ldots, i_m) \quad \text{oder} \quad \sum\nolimits_2 = 2d(i_1, i_2),$$

je nachdem ob $\mu \neq m-1$ oder $\mu = m-1$, $m > 2$ oder $\mu = 1$, $m = 2$ ist. Aus (91) und (92) ergibt sich:

$$R = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 = \delta_\mu(i_1, i_2, \ldots, i_m)$$

für jeden der Fälle. Damit ist Hilfssatz 14 bewiesen.

Hilfssatz 14 ermöglicht es, die Unterdeterminanten m-ten Grades der Determinanten $D(k_1, k_2, \ldots, k_{m+1})$ (vergl. (80)) als Summe von Determinanten $D((\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_m)$ darzustellen.

Nun gilt nach (81) (im folgenden sei stets $n = 2\nu$)

$$(93) \qquad D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu, 1) = 0.$$

Die letzte Zeile in dieser Determinante lautet nach (74), (75) und (77)

$$0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ q_0 + q_0,\ q_1 + q_1.$$

Durch Entwicklung der Determinante nach der letzten Zeile findet man

$$(94) \qquad 2p_1 D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) - 2p_0 D' = 0.$$

Dabei bedeute D' die Determinante, die aus $D((k_1, k_2, \ldots, k_\nu, 1)$ durch Streichen der letzten Zeile und der vorletzten Spalte entsteht. Aus Hilfssatz 14 schließt man dann sehr leicht

$$(95) \qquad D' = \sum_\varkappa D(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu),$$

wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu$ alle Systeme durchläuft, die aus $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu$ durch Veränderung einer Zahl um 1 entstehen. Aus (94) und (95) folgt

$$(96) \qquad p_1 D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \sum_\varkappa D(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu).$$

Jetzt sollen die Determinanten D durch die Determinanten $\varDelta$ ersetzt werden. Ist $\varkappa_{\varrho+1} = \varkappa_\varrho + 1$, so wird $\varDelta(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) = 0$. Ist $k_\nu \geqq 2$, so folgt aus (83) sofort

(97) $$p_1 \varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \sum_\varkappa \varDelta(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu).$$

Für $k_\nu = 1$ ergibt sich

(98) $$p_1 \varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \sum_\varkappa \varDelta(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) + \varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, 0).$$

Ist $k_\nu = 0$, so wird $D(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, -1) = D(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, 1)$; $\varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, -1) = 0$. Aus (83) und (96) folgt dann:

$$2 p_1 \varDelta(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = 2 \sum_\varkappa \varDelta(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu),$$

so daß (97) auch für $k_\nu = 0$ gilt. (97) und (98) enthalten den Beweis des Hilfssatzes 11 in § 6. Die p_a sollen im folgenden immer wie hier in § 7 definiert werden. Aus III, (82) und (83) folgt dann

III*. *Definiert man die Wronskischen Funktionen p_a für $a < 0$ so, daß die Rekursionsformel erhalten bleibt, so gilt*

$$\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \left| p_{k_\varrho - \varrho + \sigma} - p_{k_\varrho - \varrho - \sigma} \right|_{(\nu)}, \quad (n = 2\nu + 1);$$

$$\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) + \gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu) = D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$$
$$= \left| p_{k_\varrho - \varrho + \sigma} - p_{k_\varrho - \varrho - \sigma} \right|_{(\nu)}, \qquad (n = 2\nu).$$

Für $\mu < \nu$, gerades und ungerades n gilt

$$\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\mu, 0, 0, \ldots, 0) = D(k_1, k_2, \ldots, k_\mu).$$

Die letzte Gleichung von III* folgt sofort aus den beiden ersten Gleichungen.

III. ABSCHNITT.

§ 8. Die Komposition der Charakteristiken.

Es ist für das folgende zweckmäßig, das Symbol $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ für alle ganzzahligen Systeme k zu definieren. Es sei zunächst n ungerade. Wir setzen

(99) $$l_\varrho = k_\varrho + \nu - \varrho + \tfrac{1}{2}, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, \nu);$$

(100) $$\gamma(k) = \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \beta(l_1, l_2, \ldots, l_\nu) = \beta(l).$$

Dann ist $\beta(l)$ für alle Systeme von reduzierten Brüchen $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$ mit dem Nenner 2 definiert, die den Bedingungen genügen

$$l_1 > l_2 > \cdots > l_\nu > 0.$$

Wir wollen jetzt fordern, daß $\beta(l)$ bis aufs Vorzeichen umgeändert bleibt, wenn man die Zahlen $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$ irgendwie permutiert und die Vorzeichen der Zahlen beliebig abändert. Das Vorzeichen von $\beta(l)$ soll ungeändert bleiben, wenn die ausgeführte Permutation und die Anzahl der Vorzeichenänderungen beide gerade oder beide ungerade sind, im anderen Falle soll es sich ändern. Sind unter den Zahlen $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$ zwei dem absoluten Betrage nach gleich, so muß man notwendig $\beta(l) = 0$ setzen. Für jedes System von reduzierten Brüchen $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$ mit dem Nenner 2 wird dann durch diese Forderung $\beta(l)$ eindeutig definiert. Setzt man dann noch fest, daß (100) allgemein gelten soll, so ist damit $\gamma(k)$ für jedes System von ν ganzen Zahlen definiert. $\gamma(k)$ ist entweder eine einfache Charakteristik oder das Negative einer solchen oder 0. Der letzte Fall tritt dann und nur dann ein, wenn unter den Zahlen

$$|k_\varrho + \nu - \varrho + \tfrac{1}{2}| \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, \nu)$$

zwei gleich sind. In den anderen Fällen kann man sofort die Berechnung von $\gamma(k)$ auf die eines „eigentlichen" Symbols $\gamma(k')$ mit

$$k'_1 \geqq k'_2 \geqq \cdots \geqq k'_\nu \geqq 0$$

zurückführen.

Die Determinanten

$$D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \left| q_{k_\varrho - \varrho + 1}, \; q_{k_\varrho - \varrho + 2} + q_{k_\varrho - \varrho}, \; \ldots, \; q_{k_\varrho - \varrho + \nu} + q_{k_\varrho - \varrho - \nu + 2} \right|_{(\nu)}$$

sind von selbst für alle ganzzahligen Systeme k definiert. Die Funktionen p_a und q_a seien dabei für $a < 0$ wie in § 7 eingeführt. Vertauscht man in der Determinante die ϱ_1-te und die ϱ_2-te Zeile, so findet man

$$\begin{aligned} (101) \qquad & D(k_1, \ldots, k_{\varrho_1}, \ldots, k_{\varrho_2}, \ldots, k_\nu) \\ & = D(k_1, \ldots, k_{\varrho_2} - \varrho_2 + \varrho_1, \ldots, k_{\varrho_1} - \varrho_1 + \varrho_2, \ldots, k_\nu). \end{aligned}$$

Für $\mu \neq \varrho_1, \varrho_2$ soll hier links und rechts an der μ ten Stelle dieselbe Zahl k_μ stehen. Ferner gilt nach (74) und (77)

$$(102) \qquad q_a = (-1)^n q_{-a-n+2}.$$

Multipliziert man in $D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ die Elemente der ϱ-ten Zeile mit -1, so findet man

$$(103) \quad D(k_1, \ldots, k_\varrho, \ldots, k_\nu) = -D(k_1, \ldots, -k_\varrho - n + 2\varrho, \ldots, k_\nu).$$

Setzt man $D(k) = B(l)$, wo l wie in (99) eingeführt ist, so ergibt sich aus (101) und (103), daß sich $B(l)$ bei Permutation der Zahlen $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$ und bei Vorzeichenabänderungen genau so verhält wie $\beta(l)$. Daraus folgt, daß die Gleichung des Satzes III*

$$\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \qquad (n = 2\nu + 1) \tag{104}$$

für alle ganzzahligen Systeme k gilt.

Ist $n = 2\nu$, so setzen wir

$$l_\varrho = k_\varrho + \nu - \varrho \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{105}$$

$$\gamma(k) = \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \beta(l_1, l_2, \ldots, l_\nu) = \beta(l). \tag{106}$$

Hier ist also zunächst $\beta(l)$ für alle ganzzahligen Systeme l definiert, die der Bedingung

$$l_1 > l_2 > \cdots > l_{\nu-1} > |l_\nu|$$

genügen. Wir schreiben vor, daß $\beta(l)$ bis aufs Vorzeichen ungeändert bleiben soll, wenn man die Zahlen $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$ irgendwie permutiert und eine gerade Anzahl von Vorzeichen bei ihnen abändert. Das Vorzeichen von $\beta(l)$ soll dabei ungeändert bleiben oder nicht, je nachdem die Permutation gerade oder ungerade ist. Durch diese Festsetzung wird $\beta(l)$ für jedes ganzzahlige System l definiert und daher mit Hilfe von (106) auch $\gamma(k)$ für jedes ganzzahlige System k. Ist k irgend ein System von ganzen Zahlen, so ist entweder $\gamma(k)$ eine einfache Charakteristik oder das Negative einer solchen oder 0. Der letzte Fall tritt dann und nur dann ein, wenn unter den Zahlen

$$|k_\nu + \nu - \varrho|, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, \nu)$$

zwei gleich sind. In den anderen Fällen läßt sich die Umrechnung mühelos ausführen. Ersetzt man in $\gamma(k)$ φ_ν durch $-\varphi_\nu$, so sieht man leicht ein, daß dann stets $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu)$ in $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu)$ übergeht. Ähnlich wie bei ungeradem n findet man, daß hier die Gleichung des Satzes III

$$\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) + \gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu) = D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \tag{107}$$

für alle ganzzahligen Systeme k gilt. Man hat

$$D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = B(l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$$

zu setzen und zu zeigen, daß $B(l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$ sich bei Permutation der Zahlen l_ϱ und bei Abänderung der Vorzeichen genau entsprechend verhält wie

$$\beta(l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}, l_\nu) + \beta(l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}, -l_\nu).$$

Dieser Nachweis ist sofort auf Grund ganz einfacher Determinantenumformungen analog wie bei ungeradem n unter Verwendung von (102) zu führen.

Wir können jetzt das Kompositionsgesetz aussprechen:

IV. *Es sei $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ ein System von ν ganzen Zahlen. Ferner sei*

$$Z = \sum_\lambda e^{i(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu\varphi_\nu)}$$

eine (einfache oder zusammengesetzte) Charakteristik von $\mathfrak{D}$; λ durchläuft in der Formel eine wohlbestimmte Gitterpunktsmenge L. Dann gilt die Formel

$$\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \,.\, Z = \sum_\lambda \gamma(k_1 + \lambda_1,\ k_2 + \lambda_2,\ \ldots,\ k_\nu + \lambda_\nu),$$

wo λ genau dieselbe Menge L durchläuft.

Mit anderen Worten: Man kann das Produkt

$$\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \,.\, Z = \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \,.\, \sum_\lambda e^{i(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu\varphi_\nu)}$$

bilden, indem man $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ durch $e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)}$ ersetzt, ausmultipliziert und in der entstehenden Summe

$$\sum_\varrho e^{i(\varrho_1\varphi_1 + \varrho_2\varphi_2 + \cdots + \varrho_\nu\varphi_\nu)}$$

jedes Glied $e^{i(\varrho_1\varphi_1 + \varrho_2\varphi_2 + \cdots + \varrho_\nu\varphi_\nu)}$ wieder durch $\gamma(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu)$ ersetzt.

Beweis: Im Fall $n = 2$, $\gamma(k) = e^{ik\varphi_1}$ ist die Behauptung trivial, wir können $n \geqq 3$ annehmen.

1. Zunächst zeigen wir: Ist l ganz,

$$\varepsilon q_l = \sum_\lambda e^{i(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu\varphi_\nu)},$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist und λ eine gewisse Gitterpunktsmenge L durchläuft, (die man im Fall $q_l = 0$ leer zu nehmen hat), so gilt

$$(108)\quad D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \,.\, q_l = \varepsilon \sum_\lambda D(k_1 + \lambda_1,\ k_2 + \lambda_2,\ \ldots,\ k_\nu + \lambda_\nu).$$

Dabei durchläuft λ dieselbe Gitterpunktsmenge L. Für $l = 0$ ist wegen $q_0 = 1$ diese Behauptung trivial; ebenso ist sie trivial, wenn $q_l = 0$ ist. Der Fall $n = 2\nu$, $l = 1$ ist ferner schon in § 7 auf S. 45[1]) behandelt worden. Wir nehmen an, es sei $l > 0$ und (108) sei schon für $q_0, q_1, \ldots, q_{l-1}$ gezeigt. Wegen (102) gilt

1) Dort ist schon im wesentlichen die unten folgende Schlußweise angewendet worden, nur ist in diesem Fall eine kleine Modifikation notwendig.

die Formel dann auch für $q_{-1}, q_{-2}, \ldots, q_{-l-n+3}$. Es genügt dann, die Formel für q_l zu beweisen, und zwar dürfen wir annehmen: $l \geqq 2$ für $n = 2\nu$, $l \geqq 1$ für $n = 2\nu + 1$. Aus (81) ergibt sich

$$D = D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu, l) = 0.$$

Durch Entwicklung von D nach der letzten Zeile findet man

$$(109) \qquad \begin{aligned} 0 = D_{\nu+1}(q_l + q_{l-2\nu}) - D_\nu(q_{l-1} + q_{l-2\nu+1}) + \cdots \\ + (-1)^{\nu+1} D_2 (q_{l-\nu+1} + q_{l-\nu-1}) + (-1)^\nu \cdot D_1 q_{l-\nu}. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet D_ϱ die Unterdeterminante, die aus D durch Streichen der letzten Zeile und der ϱ-ten Spalte entsteht. Man kann D_ϱ nach Hilfssatz 14 berechnen. Es sei C_λ die λ-te elementarsymmetrische Funktion von $e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_\nu}, e^{-i\varphi_\nu}$, und es sei

$$(110) \qquad C_\lambda = \sum_\mu e^{i(\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \cdots + \mu_\nu \varphi_\nu)},$$

wo μ eine gewisse Gitterpunktsmenge M_λ durchläuft. Dann wird

$$(111) \quad D_\varrho = \sum_{\mu^{(\varrho)}} D(k_1 + \mu_1^{(\varrho)}, k_2 + \mu_2^{(\varrho)}, \ldots, k_\nu + \mu_\nu^{(\varrho)}), \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, \nu+1),$$

wo $\mu^{(\varrho)}$ die Gitterpunktsmenge $M_{\nu+1-\varrho}$ durchläuft. Insbesondere ist

$$D_{\nu+1} = D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu).$$

Diese Werte denke man sich in (109) eingesetzt. Man erhält dann rechts eine Summe von Produkten der Form $D(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) \cdot q_\lambda$. Für alle auftretenden derartigen Produkte mit Ausnahme allein von $D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \cdot q_l$ ist (108) schon bewiesen. Um zu zeigen, daß auch für dieses Produkt (108) gilt, genügt es zu zeigen, daß man auch 0 erhält, wenn man auf der rechten Seite von (109) *alle* Produkte $D(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) \cdot q_\lambda$ nach (108) berechnet; also indem man $D(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$ durch $e^{i(\varkappa_1 \varphi_1 + \varkappa_2 \varphi_2 + \cdots + \varkappa_\nu \varphi_\nu)}$ ersetzt, diesen Ausdruck mit q_λ multipliziert und in der dann entstehenden Summe $\pm \sum_\sigma e^{i(\sigma_1 \varphi_1 + \sigma_2 \varphi_2 + \cdots + \sigma_\nu \varphi_\nu)}$ das Glied $e^{i(\sigma_1 \varphi_1 + \sigma_2 \varphi_2 + \cdots + \sigma_\nu \varphi_\nu)}$ wieder durch $D(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)$ ersetzt. Ersetzt man alle $D(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$ durch $e^{i(\varkappa_1 \varphi_1 + \varkappa_2 \varphi_2 + \cdots + \varkappa_\nu \varphi_\nu)}$, so geht nach (111) D_ϱ über in

$$\sum_\mu e^{i((k_1 + \mu_1)\varphi_1 + (k_2 + \mu_2)\varphi_2 + \cdots + (k_\nu + \mu_\nu)\varphi_\nu)}$$

$$= e^{i(k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 + \cdots + k_\nu \varphi_\nu)} \sum_\mu e^{i(\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \cdots + \mu_\nu \varphi_\nu)},$$

wo μ die Punkte von $M_{\nu+1-\varrho}$ durchläuft. Nach (110) ist das gleich

$$e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)} \cdot C_{\nu+1-\varrho},$$

und daher geht beim Ersetzen von $D(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$ durch

$$e^{i(\varkappa_1\varphi_1 + \varkappa_2\varphi_2 + \cdots + \varkappa_\nu\varphi_\nu)}$$

die rechte Seite von (109) über in

$$(112) \quad e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)}\{C_0(q_l + q_{l-2\nu}) - C_1(q_{l-1} + q_{l-2\nu+1}) + \cdots \\ + (-1)^{\nu+1}C_{\nu-1}(q_{l-\nu+1} + q_{l-\nu-1}) + (-1)^\nu C_\nu q_{l-\nu}\}.$$

In (112) ist aber nach (78) die geschweifte Klammer 0, jedes Glied $e^{i(\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2 + \cdots + \sigma_\nu\varphi_\nu)}$ kommt also ebenso oft mit dem positiven wie mit dem negativen Vorzeichen vor. Ersetzt man jetzt wieder $e^{i(\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2 + \cdots + \sigma_\nu\varphi_\nu)}$ durch $D(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)$, so kommt diese Determinante ebenso oft mit dem positiven wie mit dem negativen Vorzeichen vor, und man findet auch dann 0. Daher kann man wirklich das Produkt $D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \cdot q_l$ nach der Regel bilden.

2. Sind λ_1 und λ_2 zwei nicht negative Zahlen, und ist

$$q_{\lambda_1} = \sum_\varrho e^{i(\varrho_1\varphi_1 + \varrho_2\varphi_2 + \cdots + \varrho_\nu\varphi_\nu)};$$

$$q_{\lambda_2} = \sum_\sigma e^{i(\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2 + \cdots + \sigma_\nu\varphi_\nu)},$$

so folgt

$$D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \cdot q_{\lambda_1} = \sum_\varrho D(k_1 + \varrho_1, k_2 + \varrho_2, \ldots, k_\nu + \varrho_\nu)$$

$$D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)\, q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} = \sum_\varrho D(k_1 + \varrho_1, k_2 + \varrho_2, \ldots, k_\nu + \varrho_\nu) \cdot q_{\lambda_2}$$

$$= \sum_\varrho \sum_\sigma D(k_1 + \varrho_1 + \sigma_1, k_2 + \varrho_2 + \sigma_2, \ldots, k_\nu + \varrho_\nu + \sigma_\nu).$$

Man kann also $D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ mit

$$q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} = \sum_\varrho \sum_\sigma e^{i((\varrho_1 + \sigma_1)\varphi_1 + (\varrho_2 + \sigma_2)\varphi_2 + \cdots + (\varrho_\nu + \sigma_\nu)\varphi_\nu)}$$

multiplizieren, indem man es durch $e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)}$ ersetzt, ausmultipliziert und schließlich wieder die Glieder

$$e^{i(\varkappa_1\varphi_1 + \varkappa_2\varphi_2 + \cdots + \varkappa_\nu\varphi_\nu)}$$

durch $D(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$ ersetzt. Analog kann man $D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ mit Produkten $q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} \ldots q_{\lambda_\nu}$ multiplizieren, ferner auch mit linearen

Verbindungen solcher Produkte. Man kann aber $D(l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$ für irgend ein ganzzahliges System $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$ als lineare Verbindung solcher Produkte darstellen; also gilt für die Multiplikation von $D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ mit $D(l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$: Ist

$$(113) \qquad D(l_1, l_2, \ldots, l_\nu) = \pm \sum_\lambda e^{i(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu \varphi_\nu)}\;{}^{1)},$$

so folgt daraus

$$(114) \quad D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \,.\, D(l_1, l_2, \ldots, l_\nu) = \pm \sum_\lambda D(k_1 + \lambda_1, k_2 + \lambda_2, \ldots, k_\nu + \lambda_\nu),$$

wo λ in (114) dieselben Gitterpunkte durchläuft wie in (113) und dasselbe Vorzeichen zu nehmen ist.

Nach (104) ist damit IV für $n = 2\nu + 1$ bewiesen.

§ 9. Fortsetzung des Beweises: Der Fall eines geraden n.

1. Es sei jetzt $n = 2\nu$; $l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots \geqq l_{\nu-1} \geqq |l_\nu|$. Aus (107) und (114) folgt dann hier: Ist

$$(115) \quad \gamma(l_1, \ldots, l_{\nu-1}, l_\nu) + \gamma(l_1, \ldots, l_{\nu-1}, -l_\nu) = \sum_\lambda e^{i(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu \varphi_\nu)},$$

so folgt

$$(116) \quad \left\{ \begin{aligned} \prod &= [\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) + \gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu)] \\ &\qquad \cdot [\gamma(l_1, \ldots, l_{\nu-1}, l_\nu) + \gamma(l_1, \ldots, l_{\nu-1}, -l_\nu)] \\ &= \sum_\lambda \gamma(k_1 + \lambda_1, \ldots, k_{\nu-1} + \lambda_{\nu-1}, k_\nu + \lambda_\nu) \\ &\qquad + \sum_\lambda \gamma(k_1 + \lambda_1, \ldots, k_{\nu-1} + \lambda_{\nu-1}, -k_\nu - \lambda_\nu). \end{aligned} \right.$$

Dabei durchläuft λ in (116) dieselbe Gitterpunktsmenge wie in (115). Da die linke Seite in (115) ungeändert bleibt, wenn man φ_ν durch $-\varphi_\nu$ ersetzt, kommt mit jedem System $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-1}, \lambda_\nu$ auch immer $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-1}, -\lambda_\nu$ vor und zwar ebenso oft; man darf daher in der zweiten Summe in (116) λ_ν durch $-\lambda_\nu$ ersetzen.

$$(117) \quad \left\{ \begin{aligned} \prod &= \sum_\lambda \gamma(k_1 + \lambda_1, \ldots, k_{\nu-1} + \lambda_{\nu-1}, k_\nu + \lambda_\nu) \\ &\qquad + \sum_\lambda \gamma(k_1 + \lambda_1, \ldots, k_{\nu-1} + \lambda_{\nu-1}, -k_\nu + \lambda_\nu). \end{aligned} \right.$$

(117) zeigt, daß man $\prod$ berechnen kann, indem man es als Summe

1) Daß alle Glieder hier dasselbe Vorzeichen haben, folgt daraus, daß die Determinante eine Charakteristik von $\mathfrak{D}$ oder das Negative einer solchen oder 0 ist. Es ist hier aber nicht wesentlich.

der beiden Produkte

$$\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) \cdot [\gamma(l_1, \ldots, l_{\nu-1}, l_\nu) + \gamma(l_1, \ldots, l_{\nu-1}, -l_\nu)]$$

und

$$\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu) \cdot [\gamma(l_1, \ldots, l_{\nu-1}, l_\nu) + \gamma(l_1, \ldots, l_{\nu-1}, -l_\nu)]$$

darstellt und diese beiden Produkte nach IV berechnet. Damit ist aber aber noch nicht gezeigt, daß man jedes dieser beiden Produkte nach IV berechnen kann. Ist $l_\nu = 0$, so wird

$$\gamma(l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}, l_\nu) = \gamma(l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}, -l_\nu),$$

und man schließt, daß man

$$\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) \cdot \gamma(l_1 \ldots, l_{\nu-1}, 0)$$
$$+ \gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu) \cdot \gamma(l_1, \ldots, l_{\nu-1}, 0) = \tfrac{1}{2}\prod$$

in analoger Weise nach IV berechnen kann. Entsprechend kann man für $k_\nu = 0$

$$\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, 0) \cdot [\gamma(l_1, \ldots, l_{\nu-1}, l_\nu) + \gamma(l_1, \ldots, l_{\nu-1}, -l_\nu)] = \tfrac{1}{2}\prod$$

und für $k_\nu = 0$, $l_\nu = 0$ auch $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, 0) \cdot \gamma(l_1, \ldots, l_{\nu-1}, 0)$ nach IV berechnen.

2. Man habe eine Menge L von Gitterpunkten λ derart, daß $\sum\limits_\lambda e^{i(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu\varphi_\nu)}$ die Symmetrieeigenschaften einer Charakteristik hat, ferner sei

$$\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \eta\,\gamma(k_1', k_2', \ldots, k_\nu'); \qquad \eta = \pm 1. \tag{118}$$

Dann soll gezeigt werden, daß die Gleichung besteht

$$\sum_\lambda \gamma(k_1 + \lambda_1, k_2 + \lambda_2, \ldots, k_\nu + \lambda_\nu) = \eta \sum_\lambda \gamma(k_1' + \lambda_1, k_2' + \lambda_2, \ldots, k_\nu' + \lambda_\nu).$$

Ist nämlich $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \neq 0$, so müssen die Zahlensysteme

$$k_1 + \nu - 1,\ k_2 + \nu - 2,\ \ldots,\ k_\nu \quad \text{und} \quad k_1' + \nu - 1,\ k_2' + \nu - 2,\ \ldots,\ k_\nu'$$

aus einander durch Permutation und Abänderung einer geraden Anzahl von Vorzeichen hervorgehen. Es sei etwa

$$k_\varrho' + \nu - \varrho = \varepsilon_\varrho (k_{\alpha_\varrho} + \nu - \alpha_\varrho) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{119}$$

Dabei stellt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, \nu$ dar; diese Permutation ist gerade oder ungerade, je nachdem ob in (118) $\eta = 1$ oder $\eta = -1$ ist. Die Zahlen ε_ϱ sind 1 oder -1, eine gerade Anzahl von ihnen ist (-1). Dann gehen auch die Zahlensysteme

$$k_1 + \lambda_1 + \nu - 1,\ k_2 + \lambda_2 + \nu - 2,\ \ldots,\ k_\nu + \lambda_\nu$$

und

$$k_1' + \varepsilon_1 \lambda_{\alpha_1} + \nu - 1,\ k_2' + \varepsilon_2 \lambda_{\alpha_2} + \nu - 2,\ \ldots,\ k_\nu' + \varepsilon_\nu \lambda_{\alpha_\nu}$$

aus einander durch Permutation und Abänderung einer geraden Anzahl von Vorzeichen hervor; man schließt dann leicht

$$\gamma(k_1 + \lambda_1, k_2 + \lambda_2, \ldots, k_\nu + \lambda_\nu) = \eta \cdot \gamma(k_1' + \varepsilon_1 \lambda_{\alpha_1}, k_2' + \varepsilon_2 \lambda_{\alpha_2}, \ldots, k_\nu' + \varepsilon_\nu \lambda_{\alpha_\nu});$$

$$\sum_\lambda \gamma(k_1 + \lambda_1,\ k_2 + \lambda_2,\ \ldots,\ k_\nu + \lambda_\nu)$$
$$= \eta \sum_\lambda \gamma(k_1' + \varepsilon_1 \lambda_{\alpha_1},\ k_2' + \varepsilon_2 \lambda_{\alpha_2},\ \ldots,\ k_\nu' + \varepsilon_\nu \lambda_{\alpha_\nu}).$$

Wegen der Symmetrieeigenschaften der Punktmenge L durchläuft $\varepsilon_1 \lambda_{\alpha_1}, \varepsilon_2 \lambda_{\alpha_2}, \ldots, \varepsilon_\nu \lambda_{\alpha_\nu}$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ dieselbe Menge L, es folgt

$$(120)\quad \sum_\lambda \gamma(k_1 + \lambda_1, k_2 + \lambda_2, \ldots, k_\nu + \lambda_\nu) = \eta \sum_\lambda \gamma(k_1' + \lambda_1, k_2' + \lambda_2, \ldots, k_\nu' + \lambda_\nu).$$

Ist $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = 0$, so muß es zwei verschiedene Zahlen σ und τ geben, so daß

$$k_\sigma + \nu - \sigma = \zeta \cdot (k_\tau + \nu - \tau), \qquad \zeta = \pm 1$$

ist. Man setze in diesem Falle

$$k_\mu' = k_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots, \nu); \qquad \varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau = \zeta,\ \varepsilon_\mu = 1 \quad (\mu \neq \sigma, \tau);$$
$$\eta' = -1;\ \alpha_\sigma = \tau,\ \alpha_\tau = \sigma,\ \alpha_\mu = \mu \quad (\mu \neq \sigma, \tau).$$

Dann sind (118) und (119) erfüllt, und man schließt daraus (120)

$$\sum_\lambda \gamma(k_1 + \lambda_1,\ k_2 + \lambda_2,\ \ldots,\ k_\nu + \lambda_\nu) = -\sum_\lambda \gamma(k_1 + \lambda_1,\ k_2 + \lambda_2,\ \ldots,\ k_\nu + \lambda_\nu).$$

Ist also $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = 0$, so folgt auch

$$\sum_\lambda \gamma(k_1 + \lambda_1,\ k_2 + \lambda_2,\ \ldots,\ k_\nu + \lambda_\nu) = 0.$$

Diese Bemerkungen zeigen, daß man sich beim Beweis des Kompositionsgesetzes IV für das Produkt $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \cdot Z$ auf den Fall $k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_{\nu-1} \geqq |k_\nu|$ beschränken kann.

3. Man bezeichne mit Γ_l die einfache Charakteristik von $\mathfrak{D}$ mit dem Anfangsglied $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_l)}$ $(1 \leqq l \leqq \nu - 1)$, ferner sei

$$\Gamma_\nu = \gamma(1, \ldots, 1, 1) + \gamma(1, \ldots, 1, -1).$$

Zunächst handelt es sich um den Beweis von IV für Produkte $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \cdot \Gamma_l$. Nach dem oben Bewiesenen können wir dabei annehmen $k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_{\nu-1} \geqq |k_\nu|$. Der Fall $k_\nu = 0$ ist schon unter 1. am Anfang dieses Paragraphen erledigt worden; es sei etwa $k_\nu > 0$. Ferner ist dort gezeigt worden, daß aus

$$\Gamma_l = \sum_\lambda e^{i(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu\varphi_\nu)}$$

die Gleichung folgt

$$(121)\quad \begin{cases} [\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) + \gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu)]\,.\,\Gamma_l \\ \qquad = \sum\limits_\lambda \gamma(k_1+\lambda_1, k_2+\lambda_2, \ldots, k_\nu+\lambda_\nu) \\ \qquad + \sum\limits_\lambda \gamma(k_1+\lambda_1, \ldots, k_{\nu-1}+\lambda_{\nu-1}, -k_\nu+\lambda_\nu). \end{cases}$$

Zu zeigen ist, daß $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu)\,.\,\Gamma_l$ mit der ersten dieser beiden Summen übereinstimmt und $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu)\,\Gamma_l$ mit der zweiten Summe. Nun kommen jedenfalls alle Glieder von Γ_l in der l-ten elementar-symmetrischen Funktion von

$$e^{i\varphi_1},\ e^{-i\varphi_1},\ \ldots,\ e^{i\varphi_\nu},\ e^{-i\varphi_\nu}\ {}^{1)}$$

vor. Daher sind die Zahlen λ_ϱ alle 0, 1 oder -1. Es kann nun sein, daß die Zahlen $k_1+\lambda_1, k_2+\lambda_2, \ldots, k_\nu+\lambda_\nu$ nicht den Bedingungen

$$k_1+\lambda_1 \geqq k_2+\lambda_2 \geqq \cdots \geqq k_{\nu-1}+\lambda_{\nu-1} \geqq k_\nu+\lambda_\nu \geqq 0$$

genügen. Dann ist entweder

$$\gamma(k_1+\lambda_1, k_2+\lambda_2, \ldots, k_\nu+\lambda_\nu) = 0,$$

oder es ist

$$\gamma(k_1+\lambda_1, k_2+\lambda_2, \ldots, k_\nu+\lambda_\nu) = \pm\gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu),$$

wo $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 \geqq \cdots \geqq \varkappa_{\nu-1} \geqq |\varkappa_\nu|$ ist. In diesem Fall müssen die Zahlen $\varkappa_1+\nu-1, \varkappa_2+\nu-2, \ldots, \varkappa_\nu$ aus $k_1+\lambda_1+\nu-1, k_2+\lambda_2+\nu-2, \ldots, k_\nu+\lambda_\nu$ durch Permutation und Abänderung einer geraden Anzahl von Vorzeichen hervorgehen. Da aber die Zahlen $k_\varrho+\lambda_\varrho+\nu-\varrho \geqq 0$ sind und von den Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu$ höchstens $\varkappa_\nu < 0$ sein darf, darf kein Vorzeichen abgeändert werden. Daher muß $\varkappa_\nu$ die kleinste der Zahlen $k_\varrho+\lambda_\varrho+\nu-\varrho$ sein, also $\varkappa_\nu \geqq k_\nu - 1$. Folglich kann man setzen

$$(122)\quad \sum_\lambda \gamma(k_1+\lambda_1, k_2+\lambda_2, \ldots, k_\nu+\lambda_\nu) = \sum_\varkappa \pm\gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu),$$

wo $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 \geqq \cdots \geqq \varkappa_\nu \geqq k_\nu - 1$ ist und ähnlich ist

$$(123)\quad \sum_\lambda \gamma(k_1+\lambda_1, k_2+\lambda_2, \ldots, k_{\nu-1}+\lambda_{\nu-1}, -k_\nu+\lambda_\nu) = \sum_\mu \pm\gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu),$$

wo $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \cdots \geqq \mu_{\nu-1} \geqq -\mu_\nu \geqq k_\nu - 1$ ist.

1) Tatsächlich stimmt sogar, wie man leicht sieht, Γ_l mit der elementar-symmetrischen Funktion überein.

Um daher IV im Falle $k_\nu \geqq 2$ für $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) . \Gamma_l$ und $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu) . \Gamma_l$ zu beweisen, hat man nur zu zeigen, daß im ersten Produkt keine Bestandteile

$$\gamma(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu) \text{ mit } \varrho_1 \geqq \cdots \geqq \varrho_{\nu-1} \geqq |\varrho_\nu| \text{ und } \varrho_\nu < 0$$

vorkommen, im zweiten Produkt aber keine Bestandteile mit $\varrho_\nu > 0$; denn dann muß das erste Produkt mit der Summe in (122) übereinstimmen und das zweite Produkt mit der Summe in (123). Es genügt ferner, die eben ausgesprochene Behauptung für die Bestandteile von $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) . \Gamma_l$ zu beweisen; die Behauptung für $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu) . \Gamma_l$ folgt dann, wenn man φ_ν durch $-\varphi_\nu$ ersetzt. Im Fall $k_\nu = 1$ treten in den Summen auf der rechten Seite von (122) und (123) Bestandteile mit $\varkappa_\nu = 0$ bezw. $\mu_\nu = 0$ auf; wie man leicht sieht, kommt ein derartiger Bestandteil $\gamma(\varrho_1, \ldots, \varrho_{\nu-1}, 0)$ in (122) und (123) gleich oft vor. Andererseits enthalten $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, 1) . \Gamma_l$ und $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -1) . \Gamma_l$ diesen Bestandteil gleich oft, wie man erkennt, wenn man φ_ν durch $-\varphi_\nu$ ersetzt. Daher genügt es zu zeigen, daß $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) . \Gamma_l$ keine Bestandteile $\gamma(\varrho_1, \ldots, \varrho_{\nu-1}, \varrho_\nu)$ mit $\varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \cdots \geqq \varrho_{\nu-1} \geqq |\varrho_\nu|$ und $\varrho_\nu < 0$ enthält.

4. Es sei zunächst $l = 1$. Enthielte $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) . \Gamma_1$ ein $\gamma(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu)$ mit $\varrho_\nu < 0$, so entsteht das Anfangsglied von $\gamma(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu)$ durch Multiplikation eines Gliedes von $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ und eines Gliedes von Γ_1. Aus Hilfssatz 1 schließt man dann leicht (wie schon früher)

$$R = \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_\nu \leqq k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu + 1 = K + 1.$$

Nach Hilfssatz 2* enthält ferner auch $\gamma(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu) \Gamma_1$ als Bestandteil $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu)$, es folgt analog $K \leqq R + 1$, also $|K - R| \leqq 1$. Ersetzt man φ_ν durch $-\varphi_\nu$, so sieht man, daß $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu) \Gamma_1$ $\gamma(\varrho_1, \ldots, \varrho_{\nu-1}, -\varrho_\nu)$ als Bestandteil enthalten muß; man schließt analog $|K - 2k_\nu - R + 2\varrho_\nu| \leqq 1$. Für $k_\nu > 0$, $\varrho_\nu < 0$ steht das aber mit $|K - R| \leqq 1$ im Widerspruch. Damit ist der Fall $l = 1$ erledigt; es gilt

$$\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) . \Gamma_1 = \sum_\varkappa \gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu),$$

wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu$ alle Systeme durchläuft, die aus $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ durch Veränderung einer Zahl um 1 entstehen.

5. Wir nehmen an, daß IV schon für alle Produkte

$$\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) \Gamma_{l'} \text{ mit } l' = 1, 2, \ldots, l-1$$

bewiesen sei. Zunächst sei $k_\nu \geqq 2$. Dann enthält $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) \Gamma_{l-1}$

nur Bestandteile $\gamma(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu)$ mit $\varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \cdots \geqq \varrho_\nu \geqq 1$. Multipliziert man alle diese Bestandteile noch mit Γ_1, so erkennt man, daß $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu)\,\Gamma_{l-1}\Gamma_1$ nur Bestandteile $\gamma(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)$ mit $\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \cdots \geqq \sigma_\nu \geqq 0$ enthält. Da $\Gamma_{l-1}\Gamma_1$ nach dem Kompositionsgesetz (das für diesen Fall schon bewiesen ist), als Bestandteil Γ_l enthält, folgt, daß auch $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu)\,\Gamma_l$ nur Bestandteile $\gamma(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)$ mit $\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \cdots \geqq \sigma_\nu \geqq 0$ enthält. Nach dem unter 3. gesagten ist damit IV für $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) \,.\, \Gamma_l$ bewiesen. Im Fall $k_\nu = 1$ geht man besser anders vor. Wäre IV nicht für alle Produkte $\gamma(k_1, \ldots, k_\varrho, 1, 1, \ldots, 1)\,\Gamma_l$ $(k_1 \geqq \cdots \geqq k_\varrho > 1)$ richtig, so nehme man ein solches Produkt mit *möglichst großem* ϱ, für das die Behauptung falsch ist; dann bilde man

$$(124) \qquad \gamma(k_1, \ldots, k_\varrho, 2, 1, \ldots, 1)\,\Gamma_1 = \sum_{\varkappa} \gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu),$$

wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu$ alle Systeme durchläuft, die aus $k_1, \ldots, k_\varrho, 2, 1, \ldots, 1$ durch Veränderung einer Zahl um 1 entstehen. Es ist hier entweder $\gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) = 0$, oder $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 \geqq \cdots \geqq \varkappa_\nu \geqq 0$. Für alle Systeme $\varkappa$ allein mit Ausnahme von $k_1, \ldots, k_\varrho, 1, 1, \ldots, 1$ darf man $\gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) \,.\, \Gamma_l$ nach IV berechnen, da für kein anderes $\varkappa$ $\varkappa_{\varrho+1} = 1$, $\varkappa_\nu = 1$ ist. Ist $\gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu) = 0$, so beachte man 2. Um zu beweisen, daß für $\gamma(k_1, \ldots, k_\varrho, 1, 1, \ldots, 1)\,\Gamma_l$ der Satz IV doch richtig ist, genügt es, zu zeigen, daß man das richtige Resultat $\gamma(k_1, \ldots, k_\varrho, 2, 1, \ldots, 1) \,.\, \Gamma_1\Gamma_l$ erhält, wenn man in (124) auf der rechten Seite *alle* Bestandteile $\gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$ nach IV mit Γ_l multipliziert. Dann findet man aber, falls wie immer

$$\Gamma_l = \sum_{\lambda} e^{i(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu\varphi_\nu)}$$

ist,

$$\sum_{\varkappa}\sum_{\lambda} \gamma(\varkappa_1 + \lambda_1, \; \varkappa_2 + \lambda_2, \; \ldots, \; \varkappa_\nu + \lambda_\nu).$$

Dabei durchläuft $\varkappa$ alle Systeme, die aus $k_1, \ldots, k_\varrho, 2, 1, \ldots, 1$ durch Veränderung einer Zahl um 1 entstehen. Man kann diese Summe daher schreiben

$$(125) \quad \sum_{\mu}\sum_{\lambda} \gamma(k_1 + \lambda_1 + \mu_1, \; \ldots, \; k_\varrho + \lambda_\varrho + \mu_\varrho, \; 2 + \lambda_{\varrho+1} + \mu_{\varrho+1}, \; 1 + \lambda_{\varrho+2} + \mu_{\varrho+2}, \; \ldots, \; 1 + \lambda_\nu + \mu_\nu),$$

wo $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$ alle Systeme durchläuft, bei denen eine Zahl ± 1 ist und die anderen 0 sind.

Andererseits ist nach Voraussetzung für $\gamma(k_1, \ldots, k_\varrho, 2, 1, \ldots, 1)\,\Gamma_l$ das Gesetz IV richtig, da hier die Zahl an der $(\varrho + 1)$-ten Stelle

> 1 ist. Man findet

$$\begin{aligned} &\gamma(k_1, \ldots, k_\varrho, 2, 1, \ldots, 1) \,.\, \Gamma_l \\ = &\sum_\lambda \gamma(k_1+\lambda_1, \ \ldots, \ k_\varrho+\lambda_\varrho, \ 2+\lambda_{\varrho+1}, \ 1+\lambda_{\varrho+2}, \ \ldots, \ 1+\lambda_\nu). \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck kann man mit Γ_l multiplizieren, indem man nach dem (für diesen Fall schon bewiesenen) Satz IV alle Bestandteile auf der rechten Seite mit Γ_1 multipliziert. Dann entsteht aber gerade der Ausdruck (125); dieser stimmt also wirklich mit $\gamma(k_1, \ldots, k_\varrho, 2, 1, \ldots, 1) \,.\, \Gamma_l \Gamma_1$ überein. Damit ist IV für alle Produkte $\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) \,.\, \Gamma_l$ bewiesen.

6. Es sei $1 \leqq l' \leqq \nu, \ 1 \leqq l'' \leqq \nu$;

$$\Gamma_{l'} = \sum_{\lambda'} e^{i(\lambda_1' \varphi_1 + \lambda_2' \varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu' \varphi_\nu)}, \quad \Gamma_{l''} = \sum_{\lambda''} e^{i(\lambda_1'' \varphi_1 + \lambda_2'' \varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu'' \varphi_\nu)}$$

$$\Gamma_{l'} \Gamma_{l''} = \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda''} e^{i((\lambda_1' + \lambda_1'') \varphi_1 + (\lambda_2' + \lambda_2'') \varphi_2 + \cdots + (\lambda_\nu' + \lambda_\nu'') \varphi_\nu)}.$$

Durch zweimalige Anwendung des eben Bewiesenen schließt man

$$\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \Gamma_{l'} = \sum_{\lambda'} \gamma(k_1 + \lambda_1', \ k_2 + \lambda_2', \ \ldots, \ k_\nu + \lambda_\nu')$$

$$\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \left(\Gamma_{l'} \Gamma_{l''}\right) = \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda''} \gamma(k_1 + \lambda_1' + \lambda_1'', \ k_2 + \lambda_2' + \lambda_2'', \ \ldots, \ k_\nu + \lambda_\nu' + \lambda_\nu'').$$

Das zeigt, daß man das Produkt von $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ und $\Gamma_{l'} \Gamma_{l''}$ nach IV berechnen kann. Analog kann man auch $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ mit einem Ausdruck $\Gamma_{l'} \Gamma_{l''} \ldots \Gamma_{l^{(m)}}$ multiplizieren. Man kann nun für $l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots \geqq l_{\nu-1} \geqq l_\nu \geqq 0$, wie man leicht schließt (vgl. § 2), im Fall $l_\nu > 0$ $\gamma(l_1, \ldots, l_{\nu-1}, l_\nu) + \gamma(l_1, \ldots, l_{\nu-1}, -l_\nu) = \Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$, im Fall $l_\nu = 0$ $\gamma(l_1, \ldots, l_{\nu-1}, 0) = \Gamma(l_1, \ldots, l_{\nu-1}, 0)$ als lineare Kombination derartiger Ausdrücke $\Gamma_{l'} \Gamma_{l''} \ldots \Gamma_{l^{(m)}}$ darstellen. Daraus ergibt sich dann, daß für Produkte $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \,.\, \Gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$ IV richtig ist.

7. Es sei

$$(126) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma(1, 1, \ldots, 1) &= \sum_\varrho e^{i(\varrho_1 \varphi_1 + \varrho_2 \varphi_2 + \cdots + \varrho_\nu \varphi_\nu)}; \\ \gamma(1, 1, \ldots, 1, -1) &= \sum_\sigma e^{i(\sigma_1 \varphi_1 + \sigma_2 \varphi_2 + \cdots + \sigma_\nu \varphi_\nu)}. \end{aligned} \right.$$

Da $\gamma(1, 1, \ldots, 1)$ und $\gamma(1, 1, \ldots, 1, -1)$ jedenfalls in der ν-ten elementarsymmetrischen Funktion von $e^{i\varphi_1}, \ e^{-i\varphi_1}, \ \ldots, \ e^{i\varphi_\nu}, \ e^{-i\varphi_\nu}$ vorkommen, haben alle ihre Glieder die Form $e^{i(\varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_2 \varphi_2 + \cdots + \varepsilon_\nu \varphi_\nu)}$

mit $\varepsilon_\tau = 0$ oder ± 1. Ist eine der Zahlen $\varepsilon_\tau = 0$, so kommt das Glied ebenso oft in $\gamma(1, 1, \ldots, 1)$ wie in $\gamma(1, 1, \ldots, 1, -1)$ vor, weil die erste Charakteristik in die zweite übergeht, wenn man φ_τ durch $-\varphi_\tau$ ersetzt. Sind alle Zahlen $\varepsilon_\tau = \pm 1$, so kommt $e^{i(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2 + \cdots + \varepsilon_\nu\varphi_\nu)}$ in $\gamma(1, 1, \ldots, 1)$ oder in $\gamma(1, 1, \ldots, 1, -1)$ genau einmal vor, je nachdem ob eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Zahlen ε_ϱ den Wert -1 hat. Daher folgt:

$$(127)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta &= \gamma(1, 1, \ldots, 1) - \gamma(1, 1, \ldots, 1, -1) \\ &= \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu = \pm 1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\nu \,.\, e^{i(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2 + \cdots + \varepsilon_\nu\varphi_\nu)}. \end{aligned}\right.$$

Wie schon bewiesen ist, folgt aus (126)

$$\begin{aligned} &\gamma(0, 0, \ldots, 0) \,.\, [\gamma(1, 1, \ldots, 1) + \gamma(1, 1, \ldots, 1, -1)] \\ &= \sum_\varrho \gamma(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu) + \sum_\sigma \gamma(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu). \end{aligned}$$

Dabei durchlaufen ϱ und σ dieselben Gitterpunktsmengen wie in (126). Da $\gamma(0, 0, \ldots, 0) = 1$ ist, kann man die Formel auch schreiben:

$$(128)\qquad \left\{\begin{aligned} &\gamma(1, 1, \ldots, 1) + \gamma(1, 1, \ldots, 1, -1) \\ &= \sum_\varrho \gamma(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu) + \sum_\sigma \gamma(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu). \end{aligned}\right.$$

Andererseits wollen wir die Differenz der beiden Summen auf der rechten Seite von (128) bilden. Nach (126) und (127) ergibt sich

$$(129)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_\varrho \gamma(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu) - \sum_\sigma \gamma(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu) \\ &= \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu = \pm 1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\nu \,.\, \gamma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu). \end{aligned}\right.$$

Ist $\varepsilon_{\nu-1} = -1$, so wird

$$\gamma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\nu-2}, -1, 1) = \gamma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\nu-2}, -1, -1),$$

da das Zahlensystem $\varepsilon_1 + \nu - 1, \varepsilon_2 + \nu - 2, \ldots, 0, -1$ aus $\varepsilon_1 + \nu - 1$, $\varepsilon_2 + \nu - 2, \ldots, 0, 1$ durch Abänderung einer geraden Anzahl von Vorzeichen hergestellt werden kann. In (129) kommen die betreffenden Glieder mit dem Vorzeichen $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\nu-2} \,.\, (-1) \,.\, 1$ bezw. $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\nu-2} \,.\, (-1) \,.\, (-1)$ vor, sie heben sich also weg. Ist für ein μ $\varepsilon_\mu = 1$, $\varepsilon_{\mu-2} = -1$, so wird $\varepsilon_{\mu-2} + \nu - (\mu - 2) = \varepsilon_\mu + \nu - \mu$, also $\gamma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu) = 0$. Ebenso ist $\gamma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu) = 0$, wenn $\varepsilon_\nu = -1$, $\varepsilon_{\nu-2} = -1$ ist, da dann $|\varepsilon_\nu| = \varepsilon_{\nu-2} + \nu - (\nu - 2)$ ist. Aus diesen Bemerkungen schließt man

$$(130)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\varrho}\gamma(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu) - \sum_{\sigma}\gamma(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu) \\ &= \gamma(1, 1, \ldots, 1) - \gamma(1, 1, \ldots, 1, -1). \end{aligned}\right.$$

In Verbindung mit (128) ergibt das

$$(131)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\varrho}\gamma(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu) = \gamma(1, 1, \ldots, 1); \\ &\sum_{\sigma}\gamma(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu) = \gamma(1, 1, \ldots, 1, -1). \end{aligned}\right.$$

(131) zeigt, daß IV für die Produkte $\gamma(0, 0, \ldots, 0) \cdot \gamma(1, 1, \ldots, 1)$ und $\gamma(0, 0, \ldots, 0)\,\gamma(1, 1, \ldots, 1, -1)$ richtig ist.

Es sei $m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots \geqq m_\nu \geqq 0$. Multipliziert man in (131) in beiden Gleichungen die linke und die rechte Seite mit $\Gamma(m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$, (was, wie unter 6. gezeigt ist, nach IV ausgeführt werden kann), so erkennt man, daß man auch das Produkt von $\gamma(0, 0, \ldots, 0)$ und $\gamma(1, 1, \ldots, 1, \pm 1) \cdot \Gamma(m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$ nach IV berechnen kann. Ist nun $l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots \geqq l_{\nu-1} \geqq |l_\nu|$, so sieht man leicht ein, daß man $\gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$ als lineare Kombination von Ausdrücken der folgenden drei Arten darstellen kann [1]).

a) $\Gamma(m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$; b) $\gamma(1, 1, \ldots, 1) \cdot \Gamma(m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$;
c) $\gamma(1, 1, \ldots, 1, -1)\,\Gamma(m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$.

Da man $\gamma(0, 0, \ldots, 0)$ nach IV mit jedem dieser Ausdrücke multiplizieren kann, ergibt sich die Richtigkeit von IV auch für alle Produkte $\gamma(0, 0, \ldots, 0) \cdot \gamma(l_1, l_2, \ldots, l_1)$ und daher auch für alle Produkte $\gamma(0, 0, \ldots, 0) \cdot Z$, wo Z irgend eine Charakteristik von $\mathfrak{D}$ ist.

8. Schließlich sei

$$k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_{\nu-1} \geqq |k_\nu|, \quad l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots \geqq l_{\nu-1} \geqq |l_\nu|.$$

$$\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \sum_{\varkappa} e^{i(\varkappa_1\varphi_1 + \varkappa_2\varphi_2 + \cdots + \varkappa_\nu\varphi_\nu)};$$

$$\gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu) = \sum_{\lambda} e^{i(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu\varphi_\nu)}$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \cdot \gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu) \\ &= \sum_{\varkappa}\sum_{\lambda} e^{i((\varkappa_1+\lambda_1)\varphi_1 + (\varkappa_2+\lambda_2)\varphi_2 + \cdots + (\varkappa_\nu+\lambda_\nu)\varphi_\nu)}. \end{aligned}$$

Aus dem unter 7. Bewiesenen ergibt sich dann

$$(132)\quad \gamma(0, 0, \ldots, 0) \cdot \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \sum_{\varkappa}\gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$$

$$(133)\quad \gamma(0, 0, \ldots, 0) \cdot \Pi = \Pi\ \sum_{\varkappa}\sum_{\lambda}\gamma(\varkappa_1+\lambda_1,\ \varkappa_2+\lambda_2,\ \ldots,\ \varkappa_\nu+\lambda_\nu).$$

---

1) Dabei können natürlich immer mehrere Ausdrücke desselben Typs vorkommen.

In $\sum\limits_{\varkappa}\gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu)$ kommt als Summand $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ vor; die anderen Summanden, soweit sie von 0 verschieden sind, kann man in der Form $\pm\gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu)$ mit $\mu_1 \geqq \cdots \geqq \mu_{\nu-1} \geqq |\mu_\nu|$ darstellen, sie müssen sich dann immer zu je zweien wegheben. Es seien zum Beispiel $\gamma(\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots, \varkappa_\nu')$ und $\gamma(\varkappa_1'', \varkappa_2'', \ldots, \varkappa_\nu'')$ zwei Summanden, und es bestehe die Gleichung

$$\gamma(\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots, \varkappa_\nu') = \gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu) = -\gamma(\varkappa_1'', \varkappa_2'', \ldots, \varkappa_\nu'').$$

Dann folgt aus 2.

$$\sum_\lambda \gamma(\varkappa_1'+\lambda_1, \varkappa_2'+\lambda_2, \ldots, \varkappa_\nu'+\lambda_\nu) = -\sum_\lambda \gamma(\varkappa_1''+\lambda_1, \varkappa_2''+\lambda_2, \ldots, \varkappa_\nu''+\lambda_\nu).$$

Ist $\gamma(\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots, \varkappa_\nu') = 0$, so ergibt sich aus 2.

$$\sum_\lambda \gamma(\varkappa_1'+\lambda_1, \varkappa_2'+\lambda_2, \ldots, \varkappa_\nu'+\lambda_\nu) = 0.$$

Daher heben sich auch in $\sum\limits_{\varkappa}\Big(\sum\limits_\lambda \gamma(\varkappa_1+\lambda_1, \varkappa_2+\lambda_2, \ldots, \varkappa_\nu+\lambda_\nu)\Big)$ die meisten Glieder fort, übrig bleibt nur $\sum\limits_\lambda \gamma(k_1+\lambda_1, k_2+\lambda_2, \ldots, k_\nu+\lambda_\nu)$, und man findet daher nach (133)

$$(134)\qquad \left\{\begin{aligned} \Pi &= \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)\,\gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu) \\ &= \sum_\lambda \gamma(k_1+\lambda_1, k_2+\lambda_2, \ldots, k_\nu+\lambda_\nu). \end{aligned}\right.$$

Damit ist IV auch für $n = 2\nu$ allgemein bewiesen.

§ 10. Folgerungen aus dem Kompositionsgesetz.

Es sollen jetzt die einfachen Charakteristiken für $n = 2\nu$ bestimmt werden. Es sei $k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_{\nu-1} \geqq |k_\nu|$. Da

$$\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) + \gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu)$$

schon bekannt ist (Satz III*), so handelt es sich noch um die Bestimmung von $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) - \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu)$. Diese Differenz hat die Eigenschaft, ihr Vorzeichen zu wechseln, wenn man φ_ν durch $-\varphi_\nu$ ersetzt. Daher kann man sie jedenfalls nicht allein durch die W r o n s k i schen Funktionen p_a von

$$e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_\nu}, e^{-i\varphi_\nu}$$

ausdrücken, da man auf diese Weise nur Funktionen erhält, die in φ_ν gerade sind. Es liegt daher nahe, die Differenz durch die einfachste „alternierende" Funktion

$$(135)\qquad \delta = \gamma(1, 1, \ldots, 1) - \gamma(1, 1, \ldots, 1, -1)$$

zu dividieren und eine Darstellung des Quotienten durch die Funktionen p_a zu suchen. Wir setzen also für jedes ganzzahlige System

$$(136) \quad \gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) - \gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu) = \delta \, . \, F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu).$$

Wie man leicht sieht, müssen die Ausdrücke $F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ dabei den folgenden Bedingungen genügen:

1. Sind $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ und $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$ zwei ganzzahlige Systeme und gehen die Zahlen

$$l_1 + \nu - 1, \; l_2 + \nu - 2, \; \ldots, \; l_\nu \quad \text{aus} \quad k_1 + \nu - 1, \; k_2 + \nu - 2, \; \ldots, \; k_\nu$$

durch Permutation und Abänderung der Vorzeichen hervor, so gilt

$$F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \pm F(l_1, l_2, \ldots, l_\nu).$$

Es steht hier das + Zeichen, wenn die Permutation und die Anzahl der abgeänderten Vorzeichen beide gerade oder beide ungerade sind; im andern Fall gilt das − Zeichen.

2. Sind unter den Zahlen

$$|k_1 + \nu - 1|, \; |k_2 + \nu - 2|, \; \ldots, \; |k_\nu|$$

zwei gleich, oder ist eine von ihnen 0, so ist $F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = 0$ [1]. Diese Bedingungen 1. und 2. folgen aus der Art, wie in § 8 $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ für beliebige ganzzahlige Systeme $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ definiert wurde.

3. $F(1, 1, \ldots, 1) = 1$.

4. Ist $Z = \sum\limits_\lambda e^{i(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu\varphi_\nu)}$ eine Charakteristik von $\mathfrak{D}$, die ungeändert bleibt, wenn man φ_ν durch $-\varphi_\nu$ ersetzt, so gilt

$$F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \, . \, Z = \sum_\lambda F(k_1 + \lambda_1, \; k_2 + \lambda_2, \; \ldots, \; k_\nu + \lambda_\nu).$$

Das folgt aus dem Satz IV, da wegen der Voraussetzung über Z

$$\sum_\lambda (k_1 + \lambda_1, \ldots, k_{\nu-1} + \lambda_{\nu-1}, -k_\nu + \lambda_\nu) = \sum_\lambda \gamma(k_1 + \lambda_1, \ldots, k_{\nu-1} + \lambda_{\nu-1}, -k_\nu - \lambda_\nu)$$

ist. Es soll zunächst gezeigt werden, daß ein Ausdruck $F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$, der diesen vier Bedingungen genügt, den Wert

$$\frac{1}{\delta} [\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) - \gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu)]$$

haben muß; dann soll ein Ausdruck konstruiert werden, der diesen Bedingungen genügt. Erfüllt $F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ die Bedingungen 1

---

1) Das ist übrigens eine Folge der ersten Bedingung.

bis 4, so folgt aus den ersten beiden Bedingungen, daß, wenn

$$\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \pm \gamma(l_1, l_2, \ldots, l_\nu),$$

bezw. $\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = 0$ ist, auch

$$F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \pm F(l_1, l_2, \ldots, l_\nu),$$

bezw. $F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = 0$ sein muß. Ferner ergibt sich

$$F(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) = -F(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu).$$

Daher kann man sich auf den Fall $k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_\nu \geqq 0$ beschränken. Wir setzen

$$(137) \quad f(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \frac{1}{\delta}[\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) - \gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu)].$$

Zu zeigen ist

$$f(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$$

Nun ist für $k_\nu = 0$ wegen der 2. Bedingung $F(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}, 0) = 0$. Ferner gilt $f(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, 0) = 0$. Also ist für $k_1 = k_2 = \cdots = k_\nu = 0$ die Behauptung richtig; außerdem können wir $k_\nu > 0$ annehmen. Wir setzen voraus, daß schon für alle Systeme ϱ,

$$(\varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \cdots \geqq \varrho_\nu \geqq 0),$$

die niedriger als k sind, die Gleichung

$$f(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu) = F(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu)$$

bewiesen ist. Man setze für $k_\nu = 1$

$$Z = \gamma(k_1 - 1, k_2 - 1, \ldots, k_{\nu-1} - 1, 0) = \sum_\lambda e^{i(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu\varphi_\nu)},$$

für $k_\nu > 1$

$$(Z = \gamma(k_1-1, k_2-1, \ldots, k_{\nu-1}-1, k_\nu-1) + \gamma(k_1-1, k_2-1, \ldots, k_{\nu-1}-1, -k_\nu+1)$$
$$= \sum_\lambda e^{i(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu\varphi_\nu)},$$

Dann folgt aus IV

$$(138) \qquad \gamma(1, 1, \ldots, 1) . Z = \sum_\lambda \gamma(1+\lambda_1, 1+\lambda_2, \ldots, 1+\lambda_\nu),$$

$$f(1, 1, \ldots, 1) . Z = \gamma(1, 1, \ldots, 1) . Z - \gamma(1, 1, \ldots, 1, -1) . Z$$
$$= \sum_\lambda \gamma(1+\lambda_1, \ldots, 1+\lambda_{\nu-1}, 1+\lambda_\nu) - \sum_\lambda \gamma(1+\lambda_1, \ldots, 1+\lambda_{\nu-1}, -1+\lambda_\nu).$$

Da Z ungeändert bleibt, wenn man φ_ν durch $-\varphi_\nu$ ersetzt, kann man in der zweiten Summe λ_ν durch $-\lambda_\nu$ ersetzen und erhält dann

$$139) \qquad f(1, 1, \ldots, 1) . Z = \sum_\lambda f(1+\lambda_1, 1+\lambda_2, \ldots, 1+\lambda_\nu).$$

Aus der 4. Bedingung für F ergibt sich

$$(140) \qquad F(1,1,\ldots,1)\,.\,Z = \sum_\lambda F(1+\lambda_1, 1+\lambda_2, \ldots, 1+\lambda_\nu).$$

Wenn $\gamma(1+\lambda_1, 1+\lambda_2, \ldots, 1+\lambda_\nu) = 0$ ist, ist auch

$f(1+\lambda_1, 1+\lambda_2, \ldots, 1+\lambda_\nu) = 0$ und $F(1+\lambda_1, 1+\lambda_2, \ldots, 1+\lambda_\nu) = 0$; diese Summanden lasse man weg. Die andern Ausdrücke $\gamma(1+\lambda_1, 1+\lambda_2, \ldots, 1+\lambda_\nu)$ kann man auf die Form $\pm\gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu)$ mit $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \cdots \geqq \mu_{\nu-1} \geqq |\mu_\nu|$ bringen. Dann gilt auch

$$f(1+\lambda_1, 1+\lambda_2, \ldots, 1+\lambda_\nu) = \pm f(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu);$$
$$F(1+\lambda_1, 1+\lambda_2, \ldots, 1+\lambda_\nu) = \pm F(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu).$$

(138) geht bei dieser Umformung über in

$$(141) \qquad \gamma(1, 1, \ldots, 1)\,.\,Z = \sum_\mu \pm\gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu).$$

Die links stehende Charakteristik hat das Anfangsglied

$$e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_\nu\varphi_\nu)};$$

da ferner $\gamma(1, 1, \ldots, 1)$ von Gliedern der Form

$$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{\nu-1} + \varepsilon_\nu\varphi_\nu)}$$

nur das Glied $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{\nu-1} + \varphi_\nu)}$ enthält, so erkennt man, daß $\gamma(1, 1, \ldots, 1)\,.\,Z$ das Glied $e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_{\nu-1}\varphi_{\nu-1} - k_\nu\varphi_\nu)}$ nicht enthält. Daher kommt in $\sum\limits_\mu \pm\gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu)$ genau einmal $+\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ vor; dagegen $\pm\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu)$ nicht. Alle Systeme μ mit Ausnahme von $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ müssen niedriger als $k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu$ sein. Aus (139) und (140) schließt man dann die Existenz von Darstellungen

$$(142) \qquad f(1, 1, \ldots, 1)\,.\,Z = f(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) + \sum_\varrho \pm f(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu)$$

$$(143) \qquad F(1, 1, \ldots, 1)\,.\,Z = F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) + \sum_\varrho \pm F(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu),$$

wo ϱ in (142) und in (143) dieselbe Gitterpunktsmenge durchläuft und bei entsprechenden Gliedern dasselbe Vorzeichen zu nehmen ist. Ferner sind alle ϱ niedriger als $k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu$, und es gilt $\varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \cdots \geqq \varrho_{\nu-1} \geqq |\varrho_\nu|$. Wegen

$$f(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\nu-1}, -\varrho_\nu) = -f(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\nu-1}, \varrho_\nu);$$
$$F(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\nu-1}, -\varrho_\nu) = -F(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\nu-1}, \varrho_\nu)$$

kann man bei Änderung der Bezeichnungsweise in (142) und (143)

$\varrho_\nu \geqq 0$ annehmen; dann sind noch alle Systeme ϱ niedriger als $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$. Nach Voraussetzung gilt für alle diese ϱ

$$f(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu) = F(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu).$$

Aus (135) und (137) folgt $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$; ebenso ist nach der Bedingung 3. $F(1, 1, \ldots, 1) = 1$. Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen folgt aus (142) und (143)

$$f(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Es handelt sich jetzt um die Konstruktion der Ausdrücke F. Die Bedingungen, die wir zu erfüllen haben, sind fast dieselben, wie die, denen

$$D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \left| q_{k_\varrho-\varrho+1}, q_{k_\varrho-\varrho+2} + q_{k_\varrho-\varrho}, \ldots, q_{k_\varrho-\varrho+\nu} + q_{k_\varrho-\varrho-\nu+2} \right|_{(\nu)}$$

genügt. Daß die Determinanten D insbesondere der vierten Bedingung genügen, wurde mit Hilfe des Hilfssatzes 14 aus den Rekursionsformeln

$$C_0(q_a + q_{a-n}) - C_1(q_{a-1} + q_{a-n+1}) + \cdots + (-1)^{\nu-1} C_{\nu-1}(q_{a-\nu+1} + q_{a-\nu-1}) \\ + (-1)^\nu C_\nu q_{a-\nu} = 0$$

geschlossen. Daher liegt der Ansatz nahe

$$(144) \quad F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \left| u_{k_\varrho-\varrho+1}, u_{k_\varrho-\varrho+2} + u_{k_\varrho-\varrho}, \ldots, u_{k_\varrho-\varrho+\nu} + u_{k_\varrho-\varrho-\nu+2} \right|_{(\nu)},$$

wo die u_k so bestimmt werden sollen, daß die analogen Rekursionsformeln

$$(145) \quad \left\{ \begin{aligned} & C_0(u_a + u_{a-n}) - C_1(u_{a-1} + u_{a-n+1}) + \cdots + (-1)^{\nu-1} C_{\nu-1}(u_{a-\nu+1} + u_{a-\nu-1}) \\ & \qquad + (-1)^\nu C_\nu u_{a-\nu} = 0 \end{aligned} \right.$$

auch hier gelten. Ganz einfache Determinantenumformungen ergeben, daß die Bedingungen 1 und 2 dann sicher erfüllt sind, wenn

$$(146) \qquad u_a = -u_{-a-n+2} \text{ [1]}$$

ist. Durch (145) und (146) ist u_a noch nicht eindeutig bestimmt; man erkennt leicht, daß man noch $u_1, u_0, u_{-1}, \ldots, u_{-n+2}$ in Übereinstimmung mit (146) vorschreiben darf. Da aber $F(1, 1, \ldots, 1) = 1$ sein soll, empfiehlt es sich

$$(147) \qquad u_1 = 1, \quad u_0 = u_{-1} = \cdots = u_{-n+2} = 0$$

zu setzen, dann ergibt sich aus (145) und (147)

$$u_a = p_{a-1} \qquad (a = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Wählt man die u_a so, so sind (145), (146) und (147) erfüllt,

1) Für q_a ist $q_a = + q_{-a-n+2}$ bei geradem n.

$F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ genügt dann sicher den drei ersten Bedingungen. Aber auch die vierte Bedingung ist erfüllt. Man bezeichne für $\nu+1$ Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_{\nu+1}$ mit $F(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu+1})$ die analog wie $F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ gebildete Determinante $(\nu+1)$-ten Grades. Genau entsprechend wie bei den Determinanten D in § 7 folgt hier aus (145)

$$F(k_1, k_2, \ldots, k_{\nu+1}) = 0.$$

Ersetzt man in der Betrachtung des § 8 Seite 49—52 stets q_a durch p_{a-1}, also $D(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ durch $F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$, so ergibt sich analog wie dort[1]):

Ist

$$p_{l_1} p_{l_2} \cdots p_{l_\mu} = \sum_\lambda e^{i(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu \varphi_\nu)},$$

so wird

$$F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) \cdot [p_{l_1} p_{l_2} \cdots p_{l_\mu}] = \sum_\lambda F(k_1 + \lambda_1, k_2 + \lambda_2, \ldots, k_\nu + \lambda_\nu).$$

Da man nach III* alle Charakteristiken Z von $\mathfrak{D}$, die in φ_ν gerade sind, linear aus Ausdrücken $p_{l_1} p_{l_2} \cdots p_{l_\mu}$ zusammensetzen kann, folgt dann sofort, daß für $F(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ auch die Bedingung 4 erfüllt ist. Daher wir

$$\gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, k_\nu) - \gamma(k_1, \ldots, k_{\nu-1}, -k_\nu)$$
$$= \delta \left| p_{k_\varrho-\varrho}, p_{k_\varrho-\varrho+1} + p_{k_\varrho-\varrho-1}, \ldots, p_{k_\varrho-\varrho+\nu-1} + p_{k_\varrho-\varrho-\nu+1} \right|_{(\nu)}.$$

In Verbindung mit III* und mit (127) erhält man dann

V. *Ist* $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ *ein System von* ν *ganzen Zahlen, so wird*

$$2\gamma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$$
$$= \left| p_{k_\varrho-\varrho+1} - p_{k_\varrho-\varrho-1}, p_{k_\varrho-\varrho+2} - p_{k_\varrho-\varrho-2}, \ldots, p_{k_\varrho-\varrho+\nu} - p_{k_\varrho-\varrho-\nu} \right|_{(\nu)}$$
$$+ \delta \left| p_{k_\varrho-\varrho}, p_{k_\varrho-\varrho+1} + p_{k_\varrho-\varrho-1}, \ldots, p_{k_\varrho-\varrho+\nu-1} + p_{k_\varrho-\varrho-\nu+1} \right|_{(\nu)},$$

wo mit δ *die Summe*

$$\sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu = \pm 1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\nu e^{i(\varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_2 \varphi_2 + \cdots + \varepsilon_\nu \varphi_\nu)}$$

bezeichnet ist[2]).

Im folgenden sei n gerade oder ungerade. Ist

$$Z = \sum_\lambda e^{i(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_\nu \varphi_\nu)}$$

---

1) Ein störender Ausnahmefall wie in § 8 für $n = 2\nu$, $l = 1$ tritt hier nicht ein.

2) Vgl. Anmerkung 4 auf Seite 3.

eine Charakteristik von $\mathfrak{D}$, so folgt aus IV

$$(148)\qquad \gamma(0, 0, \ldots, 0) . Z = Z = \sum_{\lambda} \gamma(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu).$$

Ist $\Theta = \sum_{\mu} e^{i(\mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \cdots + \mu_\nu\varphi_\nu)}$ ein Ausdruck, der in $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ symmetrisch ist und ungeändert bleibt, wenn man bei einer beliebigen Anzahl von Winkeln φ_ϱ das Vorzeichen abändert ($n = 2\nu+1$), bezw. wenn man bei einer geraden Anzahl von Winkeln das Vorzeichen abändert ($n = 2\nu$), so kann man Θ als Differenz zweier Charakteristiken darstellen $\Theta = Z_1 - Z_2$. Aus (148) schließt man dann

$$(149)\qquad \Theta = \sum_{\mu} e^{i(\mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \cdots + \mu_\nu\varphi_\nu)} = \sum_{\mu} \gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu).$$

Man kann dann auch sofort Θ durch die Ausdrücke $\gamma(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu)$ mit $\varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \cdots \geqq \varrho_\nu \geqq 0$; bezw. $\varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \cdots \geqq \varrho_{\nu-1} \geqq |\varrho_\nu|$ linear ausdrücken. Nimmt man z. B. für Θ die Summen, die in § 1 mit $\sigma(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ bezeichnet waren, so erhält man auf diese Weise Rekursionsformeln für die einfachen Charakteristiken, die deren sukzessive Berechnung gestatten. Die Formel (149) liefert ferner eine Lösung des sogenannten Abzählungsproblems für Orthogonalinvarianten. Bekanntlich ist dies Problem gleichbedeutend mit der Aufgabe, zu entscheiden, wie oft eine gegebene Charakteristik von $\mathfrak{D}$ die Hauptcharakteristik enthält. Man hat in (149) für Θ die gegebene Charakteristik einzusetzen und zu untersuchen, welche $\gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu)$ beim Umrechnen $\pm \gamma(0, 0, \ldots, 0)$ ergeben. Für $n = 2\nu$ hat man z. B. nur diejenigen μ zu berücksichtigen, für die $\mu_1 + \nu - 1$, $\mu_2 + \nu - 2$, $\ldots$, μ_ν sich nur durch die Reihenfolge und die Vorzeichen von $\nu - 1$, $\nu - 2$, $\ldots$, 1, 0 unterscheiden.

Diese Ergebnisse sollen noch an Spezialfällen erläutert werden.

Der Fall $n = 3$. Die Charakteristiken von $\mathfrak{D}$ haben hier die Form

$$\chi = d_0 + \sum_{\varkappa=1}^{k} d_\varkappa \left(e^{i\varkappa\varphi_1} + e^{-i\varkappa\varphi_1}\right) = d_0 + 2\sum_{\varkappa=1}^{k} d_\varkappa \cos\varkappa\varphi_1,$$

wo d_0 und $d_\varkappa$ nicht negative ganze Zahlen sind. Ferner ist hier $\gamma(-l) = -\gamma(l-1)$, nach (149) enthält also χ die einfache Charakteristik $\gamma(l)$ in der Vielfachheit $d_l - d_{l+1}$. Als einfache Charakteristiken ergeben sich daher:

$$\gamma(k) = 1 + 2\sum_{\varkappa=1}^{k} \cos\varkappa\varphi_1, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Der Fall $n = 4$. Die Charakteristiken haben die Form $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} d_{\varkappa\lambda} e^{i(\varkappa\varphi_1 + \lambda\varphi_2)}$. Es wird hier $\gamma(k', l') = \pm\gamma(k, l)$, wenn einer der 4 Fälle eintritt:

$$1)\ k' = k,\quad l' = l; \qquad 2)\ k' = -k-2,\quad l' = -l;$$
$$3)\ k' = l-1,\quad l' = k+1; \qquad 4)\ k' = -l-1,\quad l' = -k-1.$$

Daher enthält χ die einfache Charakteristik $\gamma(k, l)$, ($k \geqq |l|$ in der Vielfachheit

$$A_{kl} = d_{kl} + d_{-k-2,\,-l} - d_{l-1,\,k+1} - d_{-l-1,\,-k-1}.$$

Wegen der Symmetrieeigenschaften der Charakteristiken folgt:

$$A_{kl} = d_{kl} + d_{k+2,\,l} - d_{k+1,\,l-1} - d_{k+1,\,l+1}.$$

Hiernach oder nach V kann man $\gamma(k, l)$ berechnen. Man findet

$$\gamma(k, l) = \sum_{\varkappa,\lambda} e^{i(\varkappa\varphi_1 + \lambda\varphi_2)},$$

wo $(\varkappa, \lambda)$ alle Gitterpunkte durchläuft, die den Bedingungen

$$\varkappa + \lambda \equiv k + l \pmod 2, \quad |\varkappa+\lambda| \leqq k+l, \quad |\varkappa-\lambda| \leqq k-l$$

genügen. Besonders interessant sind die Charakteristiken

$$\gamma(1, 1) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} + 1 + e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$
$$\gamma(1, -1) = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + 1 + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Mit ihrer Hilfe erkennt man sofort, daß die Drehungen $s < \mathfrak{D}$, für die $\varphi_1 = -\varphi_2$ ist, eine invariante Untergruppe $\mathfrak{A}^{(+1)}$ von $\mathfrak{D}$ bilden und ebenso diejenigen s, für die $\varphi_1 = \varphi_2$ ist, eine invariante Untergruppe $\mathfrak{A}^{(-1)}$. $\mathfrak{A}^{(+1)}$ und $\mathfrak{A}^{(-1)}$ haben als gemeinsame Elemente nur die Einheitsmatrix E und $-E$. Ist daher $s_1 < \mathfrak{A}^{(+1)}$ und $s_{-1} < \mathfrak{A}^{(-1)}$, so ist $s_1 s_{-1} s_1^{-1} s_{-1}^{-1} = \pm E$. Eine einfache Stetigkeitsbetrachtung lehrt, daß hier das positive Vorzeichen gilt. Daher ist jedes Element von $\mathfrak{A}^{(+1)}$ mit jedem Element von $\mathfrak{A}^{(-1)}$ vertauschbar. Die beiden Untergruppen $\mathfrak{A}^{(+1)}$ und $\mathfrak{A}^{(-1)}$ sind aus der Geometrie bekannt; genaueres über sie siehe A II S. 321. Merkwürdig ist im Fall $n = 4$ noch die Formel:

$$\gamma(k, k) \cdot \gamma(l, -l) = \gamma(k+l,\ k-l), \qquad (k \geqq 0,\ l \geqq 0).$$

Ist $n \neq 4$, so hat $\mathfrak{D}$ außer den trivialen invarianten Untergruppen (E, $\mathfrak{D}$ selbst, für $n = 2\nu$ außerdem noch $E, -E$) keine weiteren invarianten Untergruppen, wie man durch elementare Überlegung zeigen kann. Damit hängt es zusammen, daß die Charakteristiken $\gamma(k, k)$ und $\gamma(k, -k)$ für $n = 4$ besonders einfach mit den Charakteristiken für $n = 3$ zusammenhängen; für größere n tritt ein derartiger Zusammenhang nicht mehr auf.

Um im Fall $n = 5$ anzugeben, wie oft eine Charakteristik χ die Hauptcharakteristik enthält, muß man schon 8 Koeffizienten von χ heranziehen.

Zum Schluß sollen noch einige Bemerkungen über die einfachen Charakteristiken von $\mathfrak{D}'$ gemacht werden. Versteht man unter r_a die a-te Wronskische Funktion der charakteristischen Wurzeln einer beliebigen Matrix t aus $\mathfrak{D}'$, und setzt man für $a < 0$ $r_a = 0$, so folgt aus Hilfssatz 9 und III. zunächst für $n = 2\nu$, $k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_\nu \geqq 0$

$$A^{(0)}(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \left| r_{k_\varrho - \varrho + 1} - r_{k_\varrho - \varrho - 1}, \ldots, r_{k_\varrho - \varrho + \nu} - r_{k_\varrho - \varrho - \nu} \right|_{(\nu)}.$$

Ist $\lambda(t)$ die Determinante von t, so wird

$$A^{(1)}(k_1, k_2, \ldots, k_\nu) = \lambda(t) \, . \, A^{(0)}(k_1, k_2, \ldots, k_\nu).$$

Entsprechend ist der Sachverhalt für $n = 2\nu + 1$. Ebenso wie bei $\mathfrak{D}$ kann man auch bei $\mathfrak{D}'$ das Abzählungsproblem behandeln.

§ 11. Über die Anwendbarkeit der Methoden auf die unitäre Gruppe $\mathfrak{U}$.

Ist $\mathfrak{U}$ die Gruppe der unitären Substitutionen in n Variabeln, $u < \mathfrak{U}$, so haben die charakteristischen Wurzeln von u die Form

$$e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \ldots, e^{i\varphi_n}.$$

Wie bei $\mathfrak{D}$ schließt man, daß eine Charakteristik von $\mathfrak{U}$ allein eine Funktion von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ist; ferner, daß sie die Form $\sum_{\varkappa} e^{i(\varkappa_1\varphi_1 + \varkappa_2\varphi_2 + \cdots + \varkappa_n\varphi_n)}$ hat, wo $\varkappa$ gewisse Gitterpunkte durchläuft. Den Multiplikationen $x'_\varrho = e^{i\varphi} x_\varrho$ aus $\mathfrak{U}$ müssen bei einem irreduzibeln Homomorphismus wieder Multiplikationen entsprechen, und daher müssen für $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n$ alle Glieder in der Summe gleich werden. Diese Glieder stellen nämlich die Wurzeln der zugeordneten Matrix dar. Man schließt dann, daß $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n$ für alle Glieder einer einfachen Charakteristik denselben Wert haben muß.

Denkt man sich die Glieder einer Charakteristik lexikographisch geordnet, so gehört zu jeder Charakteristik ein wohlbestimmtes Anfangsglied $e^{i(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_n\varphi_n)}$ mit $k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_n$.

Mit Hilfe der Determinantentransformationen von $\mathfrak{U}$ und der Charakteristik $e^{-i(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)} = |u|^{-1}$ kann man eine Charakteristik bilden, die ein vorgeschriebenes Anfangsglied

$$e^{i(l_1\varphi_1+l_2\varphi_2+\cdots+l_n\varphi_n)}, \qquad (l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots \geqq l_n)$$

hat, und die nur Glieder

$$e^{i(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots+\lambda_n\varphi_n)} \text{ mit } \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = l_1+l_2+\cdots+l_n$$

enthält. Dasselbe Verfahren wie in § 2 zeigt dann, daß zu jedem Anfangsglied nur *eine* einfache Charakteristik gehört. Die einzige Schwierigkeit liegt darin, daß hier unter einem festen Anfangsglied unendlich viele Anfangsglieder liegen; das schadet aber nichts, weil alle vorkommenden Glieder $e^{i(\mu_1\varphi_1+\mu_2\varphi_2+\cdots+\mu_n\varphi_n)}$ der Bedingung $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n = l_1+l_2+\cdots+l_n$ genügen, und man sich daher auf die Betrachtung von Anfangsgliedern beschränken kann, die dieser Bedingung genügen.

Ist $k_n \geqq 0$, so ist der zur einfachen Charakteristik mit dem Anfangsglied $e^{i(k_1\varphi_1+k_2\varphi_2+\cdots+k_n\varphi_n)}$ gehörende Homomorphismus ganz und rational; ist $k_n < 0$, so wird er es nach Multiplikation mit $|u|^{-k_n}$. Dann folgt[1]), daß die Bestimmung aller stetigen Homomorphismen von $\mathfrak{U}$ im wesentlichen mit der Bestimmung aller ganzen rationalen Homomorphismen der allgemeinen linearen Gruppe identisch ist. Diese sind aber bekannt[2]), und aus ihren Eigenschaften kann man die Eigenschaften der Charakteristiken von $\mathfrak{U}$ ableiten.

Man kann auch umgekehrt nach derselben Methode wie oben die Charakteristiken von $\mathfrak{U}$ untersuchen und daraus die Eigenschaften der ganzen rationalen Homomorphismen der allgemeinen linearen Gruppe ableiten. Von Interesse ist dabei der Satz, der an Stelle des Hilfssatzes 14 tritt. Ist M eine Matrix mit m Zeilen und $m+1$ Spalten, $(0 \leqq k \leqq m)$, so bilde man alle Determinanten m-ten Grades, deren Zeilen aus den Zeilen von M entstehen, indem man in k Zeilen von M das erste Element und in den anderen Zeilen von M das letzte Element wegläßt; die Reihenfolge der Zeilen soll dieselbe sein wie in M. Die Summe aller so gebildeten

1) Nach A I, § 1, S. 190—191.

2) I. Schur, Dissertation, vergl. Anm. 1 auf S. 9.

$\binom{m}{k}$ Determinanten ist gleich der Unterdeterminante von M, die durch Streichen der $(m+1-k)$-ten Spalte entsteht.

Es gibt hier eine ähnliche Darstellung der Charakteristiken mit Hilfe der Wronskischen Funktionen, ein analoges Kompositionsgesetz und schließlich eine ganz analoge Methode zur Lösung des Abzählungsproblems. Besonders einfach ist hier der Fall $n = 2$, man erhält als Spezialfall die Cayley-Sylvesterschen Abzählungssätze der Invariantentheorie.

Zusatz bei der Korrektur: Die in Anm. 4 auf S. 3 zitierte Arbeit ist inzwischen erschienen: Math. Zeitschrift, Bd. 24, S. 328—376.

Lebenslauf.

Ich, Richard Brauer, wurde am 10. Februar 1901 als Sohn des Kaufmanns und Handelsrichters Max Brauer in Charlottenburg geboren. Von Ostern 1907 an besuchte ich die Kaiser-Friedrich-Schule zu Charlottenburg, an der ich im September 1918 die Notreifeprüfung bestand. Im ersten Zwischensemester 1919 studierte ich an der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg, von Ostern 1919 bis Ostern 1920 an der Universität Berlin, darauf ein Semester an der Universität Freiburg und von Michaelis 1920 an wieder an der Universität Berlin. In der Hauptsache beschäftigte ich mich mit Mathematik; Vorlesungen hörte ich bei den Herren Professoren:

von Baeyer, Bieberbach, Blasius, Bolza, Carathéodory, Einstein, Hamburger, Hammerstein, Heffter, Jolles, Knopp, von Laue, Löwner, Loewy, H. Maier, E. Meyer, von Mises, Planck, Rademacher, Reichel, Rothe, Rubens †, E. Schmidt, Schneider, Schottky, I. Schur, Spranger, Stickelberger, Szegö, Troeltsch †, Weisbach, Wertheimer.

Allen diesen meinen hochverehrten Lehrern, insbesondere den Herren Prof. Dr. Bieberbach, Prof. Dr. von Mises, Prof. Dr. E. Schmidt, Prof. Dr. I. Schur, bin ich zu großem Danke verpflichtet.